**RINCE**

**Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La Universidad Nacional de La Matanza**

***Comunicación Científica***

1. **Título de la Ponencia:** "Modelo Euclideo-Barrowsiano como alternativa metodológica de representación geométrico-cuantitativa, para la justificación de la evolución de las rentas variables y otros sistemas de amortización".
2. **Área y tema al cual pertenece:** Matemática Financiera
3. **Nombre de la Jornada, Seminario, Congreso u otro tipo de evento científico:** XXXI Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera
4. **Lugar y fecha de realización**: Santiago del Estero, Octubre de 2010
5. **Nombre y Apellido del autor:** Luis Alberto Fernández
6. **Filiación Institucional:** Departamento de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Matanza. Florencio Varela 1908, San Justo, La Matanza. Provincia de Buenos Aires. Argentina.
7. **Dirección de correo electrónico particular y/o comercial:** lfernandez60@yahoo.com.ar
8. **Nombre de la Institución que aceptó el trabajo:** Asociación Civil de Profesores Universitarios de Matemática Financiera
9. **Link de acceso directo al evento y/o institución responsable de la publicación:**http://www.ucse.edu.ar/XXXIjornadasmatematicafinanciera
10. **Resumen:**

El uso de la geometría, para su aplicación en diversas disciplinas del conocimiento, tampoco nos resulta ajeno en el ámbito de la matemática financiera, en especial, en la distribución "visual" que nos brinda la evolución de los capitales en el tiempo. El presente trabajo, distingue dos subgrupos bien reconocidos en el campo de las rentas, las evoluciones lineales y las exponenciales; siendo que, para cada una de ellas, se corresponda uno de los dos modelos de referencia, el geométrico tradicional o Euclídeo, y aquel que puede representarse a través del área bajo los conceptos de integrales, con aplicación de la reconocida Regla de Barrow; por lo tanto, las rentas variables en progresión aritmética, creciente o decreciente, así como el Sistema

Alemán, se servirán del primero, en tanto el Sistema Frances, del segundo modelo.

11. **Palabras claves:** Matemática financiera - Regla de Barrow - Rentas financieras – Sistemas de Amortización - Alternativa geométrica para reconocer las Rentas financieras

12. **Desarrollo de la ponencia**

**Breve Descripción**

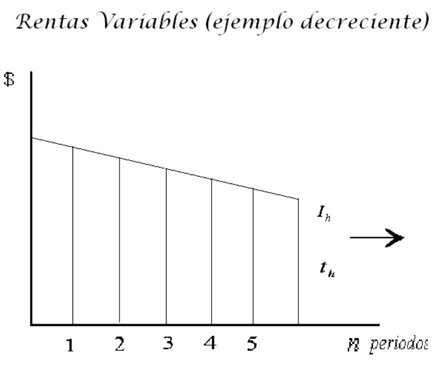
El uso de la geometría, para su aplicación en diversas disciplinas del conocimiento, tampoco nos resulta ajeno en el ámbito de la matemática financiera, en especial, en la distribución “visual” que nos brinda la evolución de los capitales en el tiempo.

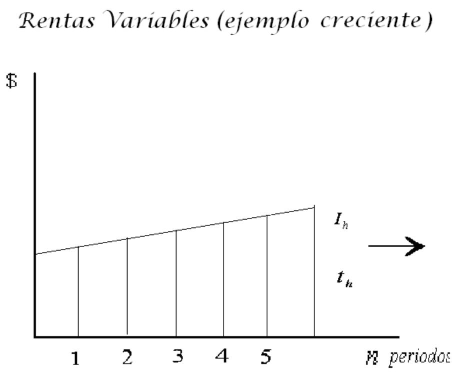
En tanto, somos capaces de representar en un modelo cartesiano, el progreso de una serie de cancelaciones o depósitos, bien sea segregando el capital de los intereses o agrupándolos convenientemente, de modo de reconocer el desembolso total (como ocurre en las rentas y los sistemas de amortización) los valores que surgen a partir de las formulas habituales para muchas aplicaciones financieras, pueden asimismo obtenerse, recurriendo al empleo de conceptos geométricos.

El presente trabajo, distingue dos subgrupos bien reconocidos en el campo de las rentas, las evoluciones lineales y las exponenciales; siendo que, para cada una de ellas, se corresponda uno de los dos modelos de referencia, el geométrico tradicional o Euclídeo, y aquel que puede representarse a través del área bajo los conceptos de integrales, con aplicación de la reconocida Regla de Barrow; por lo tanto, las rentas variables en progresión aritmética, creciente o decreciente, así como el Sistema Alemán, se servirán del primero, en tanto el Sistema Frances, del segundo modelo. En ambos casos, dicha metodología, nos permitirá definir valores que reflejan el total amortizado y/o el total de intereses, el acumulado de capital hasta un cierto momento, el capital a devengar, etc., dependiendo de cada caso en particular, buscando que el uso de la representación geométrica, nos permita componer un conjunto de soluciones, a partir de los recursos dados en su campo de incumbencia.

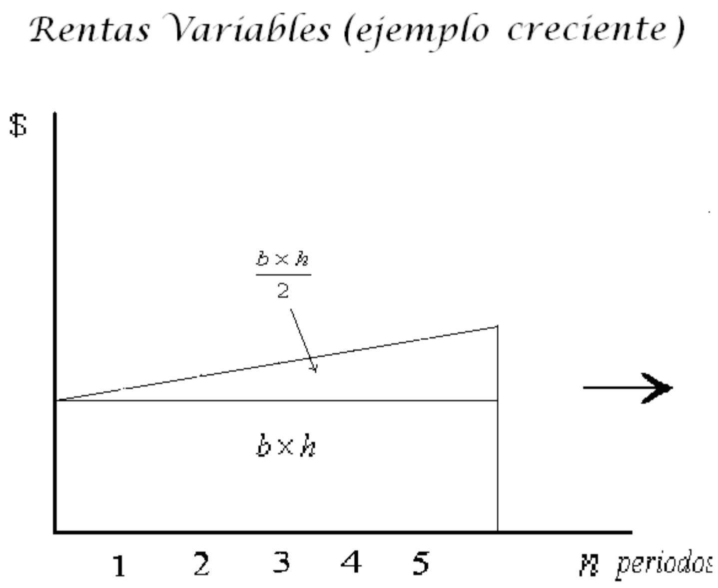
**A) Enfoque euclídeo**

Teniendo en cuenta la figura de la representación grafica de la renta variable en progresión aritmética (creciendo o decreciendo en forma constante):




Observamos que, en ambos casos, se presentan 2 figuras conocidas y adyacentes (un triangulo y un rectángulo) Recordemos las formulas que permiten reconocer sus respectivas superficies, tomando como ejemplo la representación creciente, será:



Interpretamos que, la altura del rectángulo, obedece al valor de $C_1$ (es decir, su primera cuota), la altura del triangulo adyacente, la diferencia entre $C_n$ (sea esta su última cuota) y $C_1$, y la base, estará dada por la cantidad de cuotas o términos de la renta, por lo tanto, el total de desembolsos para cualquier renta en progresión variable aritmética, resultara:

$$Total\ \ de\ \ Desembolsos = C_1 \times n + \frac{(C_n - C_1)}{2} \times n$$

$$Total\ de\ Desembolsos = n \times \left[ C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

Siendo por lo tanto, el Total de Intereses:

$$Total.de.Intereses = n \times \left[ C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right] - V_0$$

Nota: Cabe aclarar, que para el caso de una renta en progresión aritmética decreciente, habremos de invertir dicha relación, ya que, la altura del rectángulo, será dado por el valor que tome la ultima (y por lo tanto, menor) cuota de la renta ($C_n$) y la altura del cateto menor del triangulo, responderá a la diferencia entre $C_n$ y $C_1$.

Ejemplo:

Conocido que \$100 resulto ser la primera cuota de una renta variable en progresión aritmética de 4 términos con una razón de \$10, y valuada al 5% efectivo periódico, calcular el total de Intereses y su valor actual, confeccionando el cuadro de marcha para su comprobación:

Calculamos el Valor actual aplicando la correspondiente formula:

$$V_{(c,d)n>i} = \left( C_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \left( 100 + \frac{10}{0,05} + 4 \times 10 \right) \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-4}}{0,05} - \frac{4 \times 10}{0,05}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \$405,62$$

Calculamos el total de desembolsos:

$$Total.de\ Desembolsos = n \times \left[ C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = 4 \times \left[ 100 + \frac{(130 - 100)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = \$460$$

Por lo tanto, el total de Intereses asciende a:

$$Total.de.Intereses = 460 - 405,62$$

$$Total.de.Intereses = \$54,38$$


ISSN 1852-3239 - http://rince.unlam.edu.ar

Comprobación a través del cuadro de marcha:

| n | Vn/i | Ch | th | Ih |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 405,62 | | | |
| 1 | 325,90 | 100,00 | 79,72 | 20,28 |
| 2 | 232,20 | 110,00 | 93,70 | 16,30 |
| 3 | 123,81 | 120,00 | 108,39 | 11,61 |
| 4 | 0,00 | 130,00 | 123,81 | 6,19 |
| | | 460,00 | 405,62 | **54,38** |

Observamos que, por tratarse el Sistema Alemán de una progresión aritmética decreciente, valen las mismas cualidades geométricas, aplicadas según su propia esencia, ya que en este caso, el “rectángulo”, representara la deuda original y el “triangulo” el total de intereses, tomados cada cual en forma separada. El capital amortizado hasta la cuota de orden ‘h’, podrá simplemente proyectarse, tomando como la base de la figura, el segmento $C_1 \leftrightarrow C_h$, y por lo tanto, formulas como el interés devengado, interés a devengar, capital residual, etc., pueden ser calculados bajo las mismas relaciones geométricas.

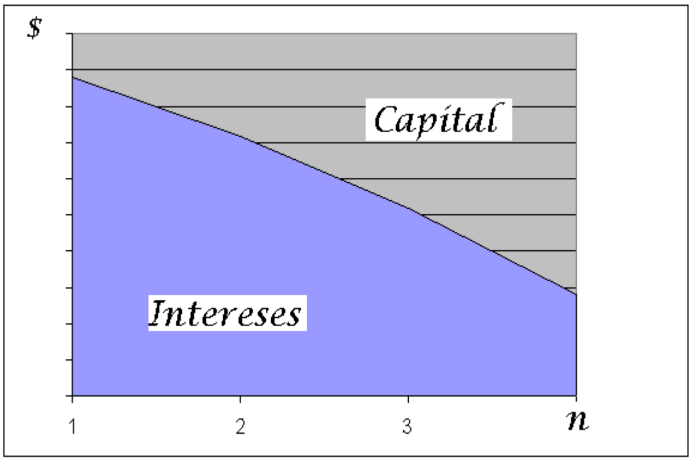
**B) Enfoque barrowsiano**

Para establecer el total de intereses de un Sistema Frances, recomponemos la formula que nos permite reconocer el Capital original, a partir del valor de la primera amortización, recordando que todas las amortizaciones parciales, crecen en progresión geométrica de razón 1+i.

Siendo: $$V_0 = t_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \therefore \quad \frac{V_0 \times i}{t_1} = (1+i)^n$$

Expresión del tipo: $$y = a^x$$

Una vez que descomponemos la formula original en una expresión más genérica del tipo $y = a^x$, procedemos a la observación de la representación grafica que le corresponde, asimilada analógicamente a la evolución de pagos de un Sistema Frances:



Integrando la función:

$$\int a^x (dx) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Aplicando la regla de Barrow para definir el área comprendida entre la función, y el eje de x en su cuadrante positivo:

$$\int_1^x \frac{a^x - a^1}{\ln a} = Area$$

Dicho concepto, representa, en términos financieros, el total de intereses para un sistema Frances (como puede observarse en el grafico precedente, en color celeste)

Si: $T.I = Area \therefore$ $\qquad Area = n \times C - V_0$

Proporción que se mantiene valida para cualquier serie amortizable por sistema francés, que se valúe a una tasa determinada, en n cancelaciones parciales.

Siendo asimismo:

$$V_0 = C \times v_{n>i}$$

$$Area = C \times (n - v_{n>i})$$

$$\boxed{C = \frac{Area}{n - v_{n>i}}}$$

Este modelo, nos permite establecer una relación univoca e inmutable entre el valor de la cuota de servicio de un sistema Frances y el total de intereses, en la medida que se trate de un capital cancelado a una cierta tasa, para una cierta cantidad de pagos, habrá una sola relación de proporción para estas dos variables, hecho que se ve reflejado en la representación visual de la evolución geométrica del sistema en particular, sin importar el capital adeudado.

Ejemplo:
Consideramos un sistema francés que será cancelado en 7 cuotas, valuado al 3% periódico.
n=7 i=0,03

Solución

$$Area = \frac{1{,}03^{7} - 1{,}03}{\ln 1{,}03}$$

En este caso, será: $Area = 6{,}761906785$

$$C = \frac{6{,}761906785}{7 - \frac{1 - 1{,}03^{-7}}{0{,}03}} \qquad C = \$8{,}78$$

Valida la regla de proporcionalidad aludida, para otra cancelación en similares características con cuota de servicio de $200, será:

$$T.I = \frac{200}{8{,}78} \times Area \qquad T.I = \frac{200}{8{,}78} \times 6{,}71906785$$

$$T.I = \$153{,}94$$

Comprobación:

| n | V | C | t | I |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1246,06 | | | |
| 1 | 1083,44 | 200,00 | 162,62 | 37,38 |
| 2 | 915,94 | 200,00 | 167,50 | 32,50 |
| 3 | 743,42 | 200,00 | 172,52 | 27,48 |
| 4 | 565,72 | 200,00 | 177,70 | 22,30 |
| 5 | 382,69 | 200,00 | 183,03 | 16,97 |
| 6 | 194,17 | 200,00 | 188,52 | 11,48 |
| 7 | 0,00 | 200,00 | 194,17 | 5,83 |
| | | 1400,00 | 1246,06 | **153,94** |

**Bibliografía**

García, Jaime A. (2008) *Matemáticas Financieras con Ecuaciones de Diferencia Infinita.* Bogota. Pearson Educación de Colombia.

Gianeschi, Mario Atilio (2005) *Curso de Matemática Financiera.* Buenos Aires. Ediciones Macchi.

Fernández, Luis Alberto (2010) *Calculo Financiero de las Operaciones Simples y Complejas.* Buenos Aires, Prometeo Libros.