RINCE - Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La Universidad Nacional de la Matanza

Recensión Bibliográfica

Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach

Galardo, Osvaldo[1]

Presentación del libro

Título de la obra reseñada: Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach
Nombre y apellido del Autor/es: H. Jerome Keisler
Editorial: University of Wisconsin
Número de edición: 2° Edición
Año de edición: 2009
Cantidad de páginas: 992 páginas
Lugar de edición: California, USA
URL disponible en Internet: http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html
Fecha de acceso a la URL: Junio 2009
Otros soportes disponibles de la obra (CD-ROM-DVD, etc.): la obra no tiene otros soportes disponibles

Desarrollo de la recensión de la obra

[1] Departamento de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de la Matanza. (UNLaM) Florencio Varela 1903. San Justo CP 1754. . Provincia de Buenos Aires. República Argentina. Tel: 4480-8900. economic@unlam.edu.ar ogalardo@gmail.com

Elementary Calculus es un texto de Cálculo de variable real, clásico en su contenido y radicalmente original en la estrategia para abordar los temas. Su contenido está conformado por una Introducción, 14 capítulos, un epílogo, un apéndice con tablas, respuestas a problemas selectos y un índice analítico, en algo más de 900 páginas. El libro incluye el tratamiento de límites, derivadas e integrales de una variable y series infinitas; un capítulo básico de vectores que facilita el acceso a un capítulo de cálculo vectorial; un capítulo de diferenciación parcial, uno de integrales múltiples y el último de ecuaciones diferenciales homogéneas y lineales de primero y segundo orden, incluyendo un apartado sobre números complejos.

La selección de temas no contiene nada excepcional, pero cumple con el mínimo que requiere un libro de introducción al Análisis Matemático.

Lo interesante - y polémico - del libro está en su estrategia de exposición del Análisis elemental, lo que está motivado por una concepción pedagógica muy alejada de la tradicional. Esto requiere alguna referencia histórica.

Es conocida y ampliamente documentada la discusión acerca de los fundamentos del Cálculo que desarrollaron, en forma separada y con distintas concepciones, Newton y Leibniz. A pesar de los éxitos resonantes en Física y Astronomía, el uso de cantidades que variaban infinitesimalmente (es decir, lo que constituía las propias bases del Cálculo) no estaba bien fundamentado, aunque resultaban intuitivamente claras.

En lo que interesa para entender el enfoque del texto de Keisler, baste decir que la fundamentación del Análisis se resolvió con el aporte -entre otros - de Cauchy y Weierstrass; el resultado son las conocidas definiciones tipo '$\varepsilon - \delta$ ', que resultan tan extrañas y anti-intuitivas a los alumnos novatos.

Hasta fines de los años 60, desde el punto de vista del aprendizaje del Cálculo teníamos la siguiente situación contradictoria: el uso de infinitesimales era intuitivo pero no estaba justificado y el uso de las formas '$\varepsilon - \delta$ ' era rigurosa pero poco entendible.

En 1966 el matemático Abraham Robinson (1918-1974) publica *Non-standard Analysis*, donde fundamenta el uso de los infinitos e infinitesimales, tan intuitivamente comprensibles pero carentes - hasta entonces- de justificación rigurosa. Parece, por lo tanto, que -como se hace en el libro de Keisler- bastará aplicar la nueva técnica para lograr una comprensión intuitivamente apta del Cálculo.

Lamentablemente, los resultados originalmente obtenidos por Robinson vía la Lógica Matemática, requieren una extensión de la recta real, para dar cabida a nuevos números: los hiperreales. Estos números surgen de considerar la "apertura" de cada punto de la recta de forma que aparece una nueva recta que contiene los infinitesimales a ambos lados de cada número real. Como lo grafica Keisler "didácticamente" en el capítulo 1, pp. 25, es como poner un telescopio sobre el cero (o cualquier otro número) que permita ver ampliado el punto de la recta correspondiente.

Todo esto requiere definiciones nuevas, como el Principio de Extensión por el cual la línea real es parte de la línea hiperreal y existe un número hiperreal que es mayor que cero pero menor que todo número real positivo (pp. 27-28).

Como era de esperar, se requieren definiciones adicionales para las extensiones hiperreales de funciones reales y las aplicaciones en continuidad, derivación e integración.

Las motivaciones en la introducción de los temas es clásico y la aplicación no estándar se usa al momento de introducir los límites; por ello, a medida que se avanza en los temas el tratamiento es el conocido, por lo que la novedad está centrada, básicamente, en la definición de límite funcional. Demás está decir que el trabajo de Robinson tenía otras motivaciones y sus resultados impactaron -por ejemplo- en la teoría de Modelos y en la Teoría Económica. El trabajo de Robinson también impactó rápidamente en el análisis epistemológico de la Matemática; por ejemplo Imre Lakatos presentó, en 1966, un trabajo relevante en el International Logic Colloquium.

Resumiendo: La "Aproximación Infinitesimal" propuesta por Keisler no parece viable como aplicación didáctica directa porque aunque elimina el uso del método '$\varepsilon - \delta$' por ser anti-intuitivo, requiere una revisión tanto o más anti-intuitiva del concepto de recta real y sus inevitables definiciones adicionales, por lo que parece que se pierde más de lo que se gana, en términos de uso inmediato.

Sin embargo, resulta un texto valioso para que los profesores de Cálculo discutan este enfoque, realicen propuestas didácticas por etapas y evalúen los resultados objetivamente. Como ocurrió con la enseñanza del Cálculo empleando el enfoque histórico (el caso más notable es el intentado por Tom Apóstol con su *Calculus*), son esperables enfoques promisorios para la mejora en la enseñanza de la materia.

Referencias Bibliográficas

Ivorra Castillo, Carlos: *Análisis No Estándar*,www.uv.es/ivorra/Libros/ANE.pdf

Lakatos, Imre (1966): *Cauchy y el continuo: La importancia del Análisis no Estándar para la Historia y la Filosofía de la Matemática*; en (1981): Matemáticas, Ciencia y Epistemología, Alianza, Madrid.