

Fecha de recepción: 21 de abril de 2017

Fecha de aceptación y versión final: 13 de junio de 2017

## **RInCE**

### **Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La Universidad Nacional de la Matanza**

#### **Artículo de investigación:**

#### ***Estudio de la varianza de los errores de Modelos ARIMA asociados a series de precipitaciones: Modelos ARCH/GARCH***

**Autores: Omar Roberto Faure<sup>1</sup> & Guillermo Daniel Scheidereiter <sup>2</sup>**

**Resumen:** Se presenta aquí un trabajo donde se estudia la presencia de heteroscedasticidad condicional autorregresiva en la varianza de los errores de los modelos ARIMA asociados a las series de precipitaciones de lluvia de la Provincia de Entre Ríos, Argentina. Se detectó evidencia de volatilidad de los errores en seis series de veintidós analizadas y se utilizó los modelos ARCH y GARCH para explicar esta variación. Se encontró órdenes no mayores que 2 para los modelos ARCH y no mayor que 1 para los GARCH. Las predicciones con estos modelos mostraron tendencia a estabilizarse en un valor constante cuando el período de predicción se extendió más de seis meses. Se concluye que acompañar las predicciones ARIMA con las predicciones ARCH/GARCH aporta información complementaria de interés estructural, que permite tener mayor claridad y previsibilidad sobre el comportamiento de estos procesos.

**Palabras Claves:** Modelos GARCH, Heteroscedasticidad, Precipitaciones en Entre Ríos, Volatilidad, modelos ARIMA.

---

<sup>1</sup> Omar Roberto Faure, Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional, correo de contacto: [ofaure@frcu.utn.edu.ar](mailto:ofaure@frcu.utn.edu.ar)

<sup>2</sup> Guillermo Daniel Scheidereiter, Facultad Regional Concordia, Universidad Tecnológica Nacional. Correo de contacto: [danielscheidereiter@gmail.com](mailto:danielscheidereiter@gmail.com)

**Title:** Study of the Variance of ARIMA Model Errors Associated with Rainfall Series: GARCH Models.

**Abstract:** We present here a study where the presence of autoregressive conditional heteroscedasticity is studied in the variance of the errors of the ARIMA models associated with the rainfall series of the Entre Ríos Province, Argentina. Evidence of error volatility was detected in six series and the ARCH and GARCH models were used to explain this variation. We found orders no greater than 2 for the ARCH models and no greater than 1 for the GARCH. Predictions with these models showed a tendency to stabilize at a constant value when the prediction period was extended more than six months. It is concluded that accompanying ARIMA predictions with ARCH / GARCH predictions provides complementary information of structural interest, which allows for greater clarity and predictability on the behavior of these processes.

**Key words:** GARCH Models, Heteroskedasticity, Rainfall in Entre Ríos, Volatility, ARIMA Models.

**Título:** Estudio da variação dos erros de modelos ARIMA associados a séries de precipitações: modelos ARCH/GARCH.

Resumo: Apresenta-se aqui um trabalho onde se estuda a presença de heteroscedasticidade condicional autorregressiva na variação dos erros dos modelos ARIMA associados à séries de precipitações de chuva da Província de Entre Ríos, Argentina. Detectou-se a evidência de volaticidade dos erros em seis séries e se utilizou os modelos ARCH e GARCH e não maiores que 1 para os GARCH. As precipitações com estes modelos mostraram tendência a instabilizar-se em um valor constante quando o período de predição se alargou mais seis meses. Conclui-se que ao acompanhar as predições ARIMA com as predições ARCH/GARCH se fornece informações complementares de interesse estrutural, que permite ter uma maior clareza e previsibilidade sobre o comportamento destes processos.

**Palavras chaves:** Modelos GARCH, Heteroscedasticidade, Precipitações em Entre Ríos, Volatilidade, modelos ARIMA.

## **1. Elección del Tema**

Cuando se realizan predicciones con modelos ARIMA, tradicionalmente se asume que la varianza es constante en el período de predicción, aunque esta suposición no siempre es cierta (Engle, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, 1982). Los modelos ARIMA se presentan como alternativas para explicar el comportamiento histórico de las precipitaciones de lluvia, entendidos los registros históricos de lluvia como series de tiempo<sup>i</sup>. Por lo tanto, considerando la capacidad predictiva de estos modelos, es plausible hallar estimaciones del comportamiento futuro, al menos a corto plazo, de estas series. No obstante, en caso de detectarse presencia de volatilidad en los errores (varianza no constante en el tiempo), es razonable proponer modelos que expliquen la evolución de la varianza a lo largo del tiempo y permitan obtener predicciones de la misma, a los efectos de conocer lo que es esperable sobre estos procesos y acompañar con estos resultados las predicciones ARIMA.

## **2. Definición del problema**

Se presenta aquí una investigación estadística, donde las unidades de análisis son las series de precipitaciones de lluvia de la Provincia de Entre Ríos. Sobre las mismas se elaboraron modelos ARIMA que describen el comportamiento histórico de los procesos estocásticos de los que devienen (Faure & Scheidereiter, 2015). Se utiliza la metodología basada en los modelos ARCH y GARCH, para tratar de responder la siguiente pregunta: ¿Hay existencia de heteroscedasticidad condicional autorregresiva y, de ser así, cuáles son los modelos ARCH/GARCH que permiten describir, estudiar y predecir el comportamiento de la varianza cambiante en el tiempo del término de error de los modelos ARIMA asociados a las series de precipitaciones?

## **3. Antecedentes (marco teórico conceptual)**

En modelos como los de mínimos cuadrados o los ARIMA, la suposición de que el valor esperado de todos los errores al cuadrado es el mismo se llama homoscedasticidad. Los datos en los que las variaciones de los términos de error no son iguales, en los que es razonable esperar que los términos de error sean mayores para algunos puntos o rangos

que para otros, se dice que tienen heteroscedasticidad (Engle, GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics, 2001).

Considérese un modelo  $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_\omega$ :

$$\Phi_P(B^\omega)\varphi_p(B)\nabla_\omega^D\nabla^d y_t = \delta + \Theta_Q(B^\omega)\theta_q(B)A_t \quad (1)$$

Donde  $A_t$  es un proceso de ruido blanco con media cero,  $y_t$  es la variable de estudio y  $\delta$  una constante.  $\varphi_p(B)$  y  $\theta_q(B)$  son el polinomio autorregresivo y el de media móvil de grados  $p$  y  $q$ , respectivamente, de la parte regular, y  $\Phi_P(B^\omega)$  y  $\Theta_Q(B^\omega)$  sus homólogos estacionales de grados  $P$  y  $Q$  y período  $\omega$ .  $\nabla^d$  y  $\nabla_\omega^D$  son los operadores de diferenciación regular y estacional de órdenes  $d$  y  $D$ , respectivamente (Shumway & Stoffer, 2011). Defínase el proceso de ruido blanco de la siguiente manera:

$$A_t = \sigma_t \cdot e_t \quad (2)$$

donde  $e_t \sim iid(0,1)$  y es independiente de las realizaciones pasadas  $A_{t-i}$  y además:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 A_{t-1}^2 + \alpha_2 A_{t-2}^2 + \dots + \alpha_s A_{t-s}^2. \quad (3)$$

Teniendo en cuenta toda la información hasta el momento  $t - 1$ , la varianza condicional de  $A_t$  es:

$$Var_{t-1}(A_t) = E_{t-1}(A_t^2) = E(A_t^2 | A_{t-1}, A_{t-2}, \dots) = \sigma_t^2 \quad (4)$$

que está relacionada con los cuadrados de los ruidos blancos pasados y cambia con el tiempo. El modelo  $A_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 A_{t-1}^2 + \alpha_2 A_{t-2}^2 + \dots + \alpha_s A_{t-s}^2 + \varepsilon_t$  (5), es un  $AR(s)$  con  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Este modelo recibe el nombre de *ARCH* (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) y fue introducido por Engle (1982) como una forma de modelar la heteroscedasticidad condicional dependiente del tiempo<sup>ii</sup> (Baillie & Bollerslev, 1992). Si se considera que la varianza condicional del proceso de ruido blanco se relaciona además

con las últimas varianzas condicionales, entonces se tiene una generalización del modelo *ARCH*:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_r \sigma_{t-r}^2 + \alpha_1 A_{t-1}^2 + \dots + \alpha_s A_{t-s}^2 \quad (6)$$

donde se asume  $\alpha_0 > 0$  y los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  también mayores o iguales que cero (Bollerslev, Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity, 1986), para garantizar que  $\sigma_t^2 > 0$ . El modelo así definido es un *GARCH(r,s)* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Este modelo fue propuesto por Tim Bollerslev en 1986<sup>iii</sup>. En términos del operador de retardos,  $B^d A_t = A_{t-d}$  con  $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ , la ecuación anterior resulta:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B)A_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , donde  $\alpha(B) = \sum_{i=1}^s \alpha_i B^i$  y  $\beta(B) = \sum_{j=1}^r \beta_j B^j$  son polinomios de grados  $s$  y  $r$  respectivamente (Francq & Zakoian, 2010). Cuando el polinomio en variable compleja,  $\beta(z)$ , vale cero se tiene un proceso *ARCH(s)*. Particularmente, un modelo *GARCH(1,1)* se deduce fácilmente de (6) (Tsay, 2002):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 A_{t-1}^2 \text{ con } 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \beta_1 \leq 1, \alpha_1 + \beta_1 < 1 \quad (7)$$

De (4) y de (6), es posible escribir  $\sigma_t^2 = A_t^2 - \varepsilon_t$ . Arreglando términos:

$$A_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)A_{t-1}^2 + (\alpha_2 + \beta_2)A_{t-2}^2 + \dots + (\alpha_s + \beta_r)A_{t-m}^2 + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_r \varepsilon_{t-r}$$

Donde  $m = \max(p, q)$ . La ecuación anterior puede escribirse como:

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_m B^m)A_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_1 B - \dots - \beta_r B^r)\varepsilon_t \quad (8)$$

que es un modelo *ARMA(m,r)* con  $m = \max(r,s)$  y  $\varphi_n = \alpha_i + \beta_j$ . Por lo que hallar un modelo *GARCH(r,s)* para el proceso  $\sigma_t^2$  es equivalente a encontrar un modelo *ARMA(m,r)* con  $m = \max(r,s)$  para el proceso  $A_t^2$ .

#### **4. Justificación del Estudio**

Los modelos con heteroscedasticidad condicional autorregresiva permiten que la varianza condicional cambie con el tiempo como una función de errores pasados (Bollerslev, Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity, 1986), mientras que los modelos generalizados (GARCH) permiten, además, la consideración de las desviaciones condicionales retardadas (Bollerslev, Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity, 1986). La previsibilidad de la volatilidad es importante para diseñar estrategias óptimas donde tenga relevancia la dinámica de los resultados futuros (Engle & Ng, Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, 1993).

En este sentido, en caso de detectarse presencia de varianza cambiante en el tiempo en los errores, es razonable acompañar las previsiones de los modelos ARIMA con el comportamiento esperable para la volatilidad de estos términos de error. Algunas de las series estudiadas en este trabajo, presentan desviaciones grandes (pequeñas) seguidas por otras pequeñas (grandes), por lo que los procesos ARCH/GARCH se presentan como las herramientas estándar para estudiar esta volatilidad (Engle, GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics, 2001).

#### **5. Limitaciones**

La investigación tiene su eje en la obtención de modelos matemáticos que permitan describir y predecir la volatilidad del término de error de los modelos ARIMA estimados para un conjunto de series de precipitaciones de lluvia, procedentes de distintos registros pluviométricos de la Provincia de Entre Ríos. Está fuera del alcance de este artículo el estudio de las causas de la volatilidad detectada, como así también la explicación de las razones de la variabilidad en las predicciones. Sólo se aporta estimaciones puntuales y regiones de confianza donde es esperable, un 95% de las veces, hallar los verdaderos valores de los parámetros estimados. Por otro lado, se propone un trabajo meramente metodológico que, de contar con datos actualizados sobre los registros de lluvia, puede aportar valiosos esquemas estructurales de previsibilidad futura, pero en modo alguno presentan relevancia en la predicción inmediata del tiempo meteorológico.

## **6. Alcances del Trabajo**

El presente trabajo tiene principalmente interés metodológico y procedimental respecto de la obtención de modelos matemáticos que aportan mayor conocimiento sobre las características de los procesos estocásticos de los que devienen las series de precipitaciones de lluvia. La contribución es metodológica en tanto que se propone una técnica de modelación de la volatilidad condicional detectada en los términos de error de los modelos ARIMA propuestos para las series de precipitaciones y es procedimental por cuanto permite establecer las etapas necesarias para arribar a tales modelos. Además, se propone la posibilidad de obtener predicciones futuras de índole estructural que revelan una dirección de previsibilidad sobre el fenómeno.

## **7. Objetivos**

El objetivo principal es hallar modelos matemáticos que expliquen la evolución en el tiempo de la varianza del término de error asociado a los modelos ARIMA estimados para las series de precipitaciones de lluvia procedentes de estaciones de registro pluviométrico de la Provincia de Entre Ríos. Además, se busca exponer posibles lineamientos metodológicos para describir y predecir la evolución temporal de estas series, que puedan ser de utilidad en otros estudios.

## **8. Hipótesis**

Se proponen dos hipótesis concernientes a las series objeto de estudio. En principio, se plantea que existen series de precipitaciones de lluvia procedentes de distintas estaciones de registro de la Provincia de Entre Ríos, donde la varianza del término de error asociado al modelo ARIMA estimado cambia con el tiempo. En segundo lugar, se presume que los modelos ARCH/GARCH permiten explicar y predecir la volatilidad asociada al término de error.

## **9. Material y Métodos**

Las series de tiempo, unidades de estudio, provienen de un conjunto de estaciones de registro pluviométrico cuyos datos se obtuvieron de la página web de la Dirección de Hidráulica de Entre Ríos. Para las mismas se confeccionó un modelo ARIMA



que explica las características primarias de los procesos estocásticos que se consideran generadores de las series (Faure & Scheidereiter, 2015). En base a estos modelos matemáticos, se procede en tres etapas: detección de heteroscedasticidad condicional autorregresiva en los errores, estimación del modelo ARCH/GARCH asociado y predicción ARIMA-GARCH.

1. *Contrastes de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva*: A los efectos de estudiar la presencia de estructura *ARCH* se utiliza como primer paso, construir y examinar las funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales, *ACF* y *PACF*, respectivamente, de la serie de los cuadrados de los residuos,  $A_t^2$ , para identificar pautas de autocorrelación. En caso de observarse una estructura *ARMA* para los cuadrados de los residuos, puede concluirse presencia de estructura con heteroscedasticidad condicional autorregresiva<sup>iv</sup> (Bollerslev, Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity, 1986). Alternativamente, se propone estimar sobre los cuadrados de los residuos, un modelo *AR(s)* del tipo  $\hat{A}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{A}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{A}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_s \hat{A}_{t-s}^2 + \eta_t$  para  $t = s + 1, s + 2, \dots, n$  y contrastar la hipótesis  $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$  (Engle, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, 1982). Como contraste se utiliza el valor del coeficiente de determinación,  $R^2$ , del modelo *AR(s)* estimado. Puesto que  $(n - s)R^2 \sim \chi^2(s)$ , el *p-value*,  $P[\chi^2(s) > (n - s)R^2]$  permite contrastar la hipótesis nula. Otra opción es calcular  $P[F(s, n - s - 1) > F_c]$ , donde  $F_c$  es el valor del estadístico *F de Snedecor* asociado al modelo *AR(s)* estimado. En ambos casos, si el *p-value* es inferior a 0,05 puede concluirse que no existe evidencia suficiente en favor de la hipótesis nula a un 5% de significancia (Mauricio, 2007).

2. *Estimación*: En el modelo *GARCH(r, s)* dado en (6), el vector de parámetros  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r)$  se estima maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud,  $L$ :

$$\ln L = \sum_{t=1}^n \frac{1}{2} \left[ -\ln(2\pi) - \ln(\sigma_t^2) - \frac{A_t^2}{\sigma_t^2} \right] \quad (9)$$



En esta expresión  $\sigma_t^2$  está definido por (6). Puede calcularse, alternativamente, la serie de los cuadrados de los residuos,  $\hat{A}_t^2$ , del modelo *ARIMA* estimado para la serie original. Estimar, luego, un modelo *ARMA*( $m, r$ ) para  $\hat{A}_t^2$  teniendo en cuenta que un modelo *GARCH*( $r, s$ ) para  $\sigma_t^2$  es equivalente a un modelo *ARMA*( $m, r$ ) para  $A_t^2$  con  $m = \max(r, s)$ :

$$\hat{A}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \varphi_i \hat{A}_{t-i}^2 + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^r \beta_j \varepsilon_{t-j} \quad (10)$$

donde  $\hat{\alpha}_i = \hat{\varphi}_i - \hat{\beta}_i, i = 1, \dots, s$  y  $\varepsilon_t$  es un ruido blanco con media cero. (Wei, 2006)

3. *Etapa de Predicción*<sup>v</sup>: Predecir el comportamiento de la varianza modelada en el tiempo puede realizarse mediante un mecanismo recursivo. Supóngase que se considera un modelo *GARCH*(1,1) y se busca la predicción óptima de  $\sigma_t^2$  un período  $l$  hacia adelante,  $\sigma_{t+l}^2$ , dada toda la información hasta el tiempo  $t$ . Si se asume que el origen de la predicción es  $h$ , para  $l = 1$  se tiene

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_h^2 + \alpha_1 A_h^2$$

donde  $A_h^2$  y  $\sigma_h^2$  son conocidos en el origen  $h$ . Por lo tanto, la predicción un paso hacia adelante resulta:

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_h^2 + \alpha_1 A_h^2 \quad (11)$$

Nótese que  $A_t^2 = \sigma_t^2 e_t^2$ , por lo que, sustituyendo en (7):  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 e_{t-1}^2$ . Sumando y restando:

$$\alpha_1 \sigma_{t-1}^2: \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 e_{t-1}^2 - \alpha_1 \sigma_{t-1}^2$$

Factorizando resulta:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 (e_{t-1}^2 - 1)$$

Por lo que, un paso hacia adelante se logra:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1\sigma_t^2(e_t^2 - 1).$$

Cuando  $t = h + 1$ :  $\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1\sigma_{h+1}^2(e_{h+1}^2 - 1)$ . Como la esperanza condicional de  $e_{h+1}^2 - 1$  dada toda la información hasta el paso  $h$  es cero, la predicción dos pasos hacia adelante con origen  $h$  es:

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1) \quad (12)$$

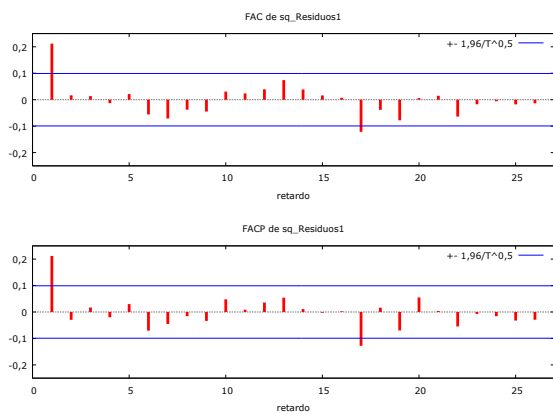
En general, para un período  $l$  (Tsay, 2002):

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1), l > 1 \quad (13)$$

## 10. Resultados

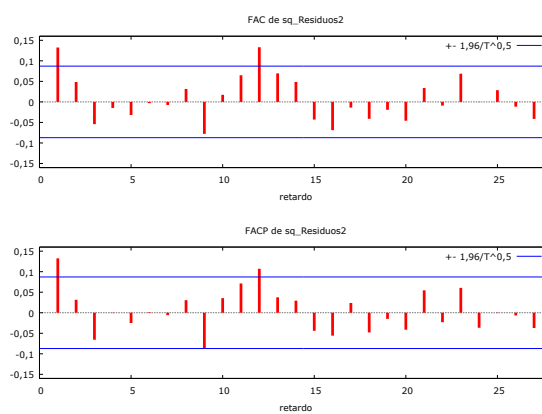
Sobre un total de veintidós series de registros de lluvia, se encontró presencia de volatilidad condicional en las series de precipitaciones procedentes de las estaciones de registros de las siguientes localidades: Santa María del Tatutí, Feliciano, San Jaime de la Frontera, San Salvador, La Paz, San Gustavo. A continuación se presenta los correlogramas asociados a los cuadrados de los residuos de los modelos ARIMA estimados y los estadísticos relacionados a la regresión auxiliar ajustada sobre los cuadrados de los residuos, junto a los p-value:

Gráfico/Tabla N°1: Santa María del Tatutí



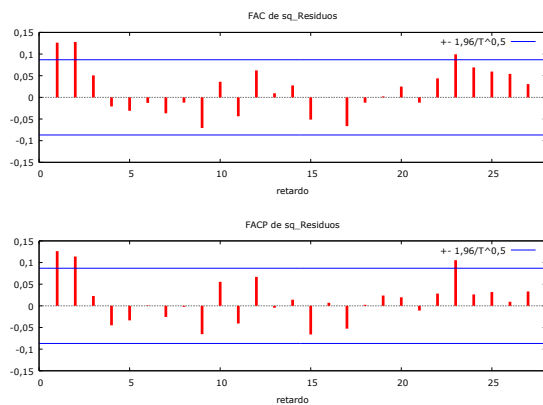
$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,044955	17,487495	2,89204e-005
$F(1;388)$		$p$ -value
18,26338		0,000024

Gráfico/Tabla N°2: Feliciano



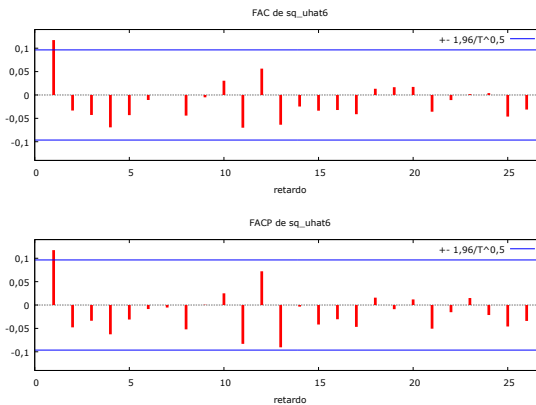
$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,017573	8,856792	0,00292
$F(1;503)$		$p$ -value
8,997273		0,002838

Gráfico/Tabla N°3: San Jaime de la Frontera



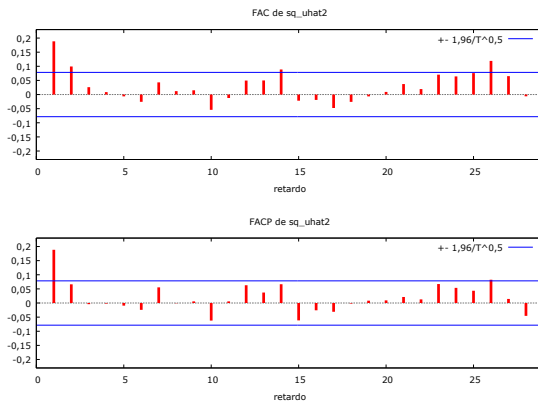
$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,015967	8,095269	0,0044381
$F(1;506)$		$p$ -value
8,210298		0,004339

Gráfico/Tabla N°4: San Salvador



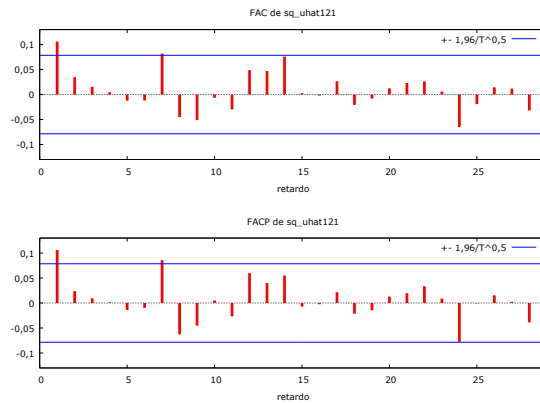
$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,013791	5,668101	0,0172761
$F(1;410)$		$p$ -value
5,733526		0,017092

Gráfico/Tabla N°5: La Paz



$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,035815	22,27693	2,36025e-006
$F(1;621)$		$p$ -value
23,06699		1,96e-06

Gráfico/Tabla N°6: San Gustavo



$R^2$	$(n-s)R^2$	$p$ -value
0,011244	6,982524	0,00823094
$F(1;620)$		$p$ -value
7,050818		0,008127

Seguidamente se muestran los modelos estimados con Gretl<sup>vi</sup>, la predicción ARIMA y la predicción GARCH. En las estimaciones, se tuvo en cuenta el Criterio de Información de Akaike, el Criterio Bayesiano de Schwarz y el Criterio de Hannan y Quinn para decidir cuál de los modelos propuestos es el que presenta mejor ajuste, además de las observaciones propias de los correlogramas asociados y los modelos ARMA ajustados a los cuadrados de los residuos. En lo que respecta a la etapa de predicción, en la práctica, téngase en cuenta que  $\sigma_h^2 = E_{h-1}(A_h^2)$  (Wei, 2006). En efecto, a modo ilustrativo, el modelo  $ARCH(2)$  propuesto para la serie procedente de La Paz, es  $\sigma_t^2 = 31,6122 + 0,174973A_{t-1}^2 + 0,0896591A_{t-2}^2$  o bien el  $AR(2)$  para los cuadrados de los residuos es  $A_t^2 = 31,6122 + 0,174973A_{t-1}^2 + 0,0896591A_{t-2}^2 + \varepsilon_t$ . La serie cuenta con 624 observaciones, por lo que si se quiere predecir la varianza un paso hacia adelante, resulta:

$$Var_{624}(A_{625}) = \sigma_{625}^2 = E_{624}(A_{625}^2) = E_{624}(31,6122 + 0,174973 \cdot A_{624}^2 + 0,0896591 \cdot A_{623}^2 + \varepsilon_{625}).$$

Como  $A_{624}^2 = 178,8223$  y  $A_{623}^2 = 211,0683$  se tiene:

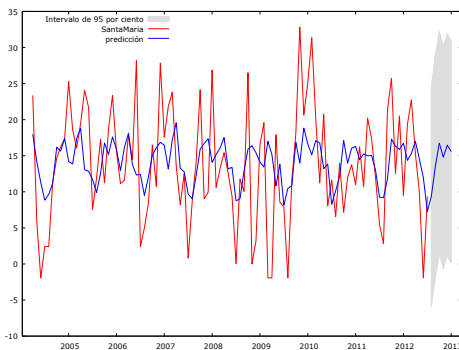
$$\sigma_{625}^2 = E_{624}(81,22546811) + E_{624}(\varepsilon_{625}) = 81,22546811. \quad \text{Con esta información,}$$

$$Var_{624}(A_{626}) = \sigma_{625}^2 = E_{624}(A_{626}^2) = E_{624}(31,6122 + 0,174973 \cdot A_{625}^2 + 0,0896591 \cdot A_{624}^2 + \varepsilon_{625}) = 61,85751031.$$

El gráfico refleja la predicción ARIMA<sup>vii</sup> (línea azul con área sombreada<sup>viii</sup>), con cien observaciones representadas anteriores a la predicción<sup>ix</sup>, donde se muestra en rojo el valor observado, mientras que la tabla consigna las predicciones ARIMA y ARCH/GARCH, acompañadas de los intervalos de confianza del 95%, para seis períodos básicos hacia adelante.

Gráfico/Tabla N°7: Serie procedente de Santa María del Tatutí

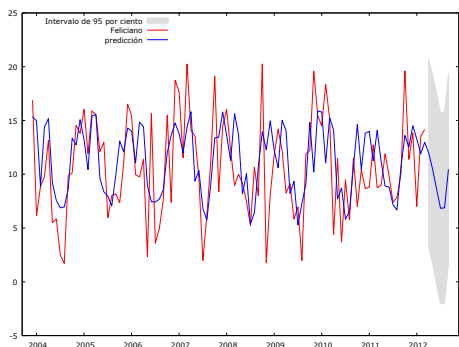
Modelo  $ARIMA(1,0,0) \times (1,0,1)_{12} - ARCH(1): \sigma_t^2 = 51,2676 + 0,156523.A_{t-1}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Conf. ARCH
ago-12	9,38188	-5,89 - 24,66	49,59424	-121,5 - 220,7
sep-12	13,47183	-1,95 - 28,89	58,62828	-115,9 - 233,1
oct-12	16,77683	1,36 - 32,20	60,43050	-114,2 - 235,1
nov-12	14,80006	-0,62 - 30,22	60,79000	-113,9 - 235,4
dic-12	16,47135	1,05 - 31,89	60,86175	-113,8 - 235,5
ene-13	15,56820	0,15 - 30,99	60,87606	-113,8 - 235,5

Gráfico/Tabla N°8: Serie procedente de Feliciano

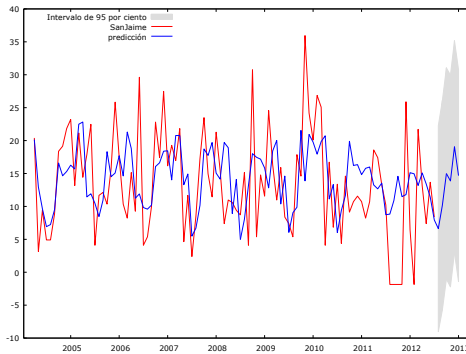
Modelo  $ARIMA(1,0,2) \times (1,1,1)_{12} - ARCH(1): \sigma_t^2 = 17,8589 + 0,0847162.A_{t-1}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Cf. ARCH
abr-12	11,98939	3,32 - 20,66	17,19302	-36,7 - 71,1
may-12	10,46701	1,66 - 19,27	19,28351	-35,1 - 73,7
jun-12	8,61410	-0,26 - 17,49	19,56070	-34,8 - 73,9
jul-12	6,83267	-2,04 - 15,71	19,59745	-34,8 - 73,9
ago-12	6,88017	-1,99 - 15,76	19,60233	-34,8 - 73,9
sep-12	10,45959	1,58 - 19,34	19,60297	-34,8 - 73,9

Gráfico/Tabla N°9: Serie procedente de San Jaime de la Frontera

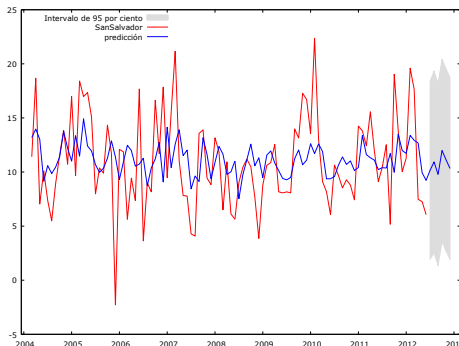
Modelo  $ARIMA(2,0,1) \times (1,1,1)_{12} - GARCH(1,1): \sigma_t^2 = 29,3276 + 0,135202 \cdot A_{t-1}^2 + 0,40489 \sigma_{t-1}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Cf. ARCH
ago-12	6,62510	-9,03 - 22,28	51,55806	-126,6 - 229,8
sep-12	10,16340	-5,74 - 26,07	56,82448	-122,9 - 236,5
oct-12	14,99263	-1,06 - 31,04	59,86066	-120,3 - 240,0
nov-12	13,87091	-2,21 - 29,95	61,61108	-118,7 - 241,9
dic-12	19,0611	2,97 - 35,15	62,62022	-117,8 - 243,0
ene-13	14,67772	-1,42 - 30,77	63,20201	-117,2 - 243,6

Gráfico/Tabla N°10: Serie procedente de San Salvador

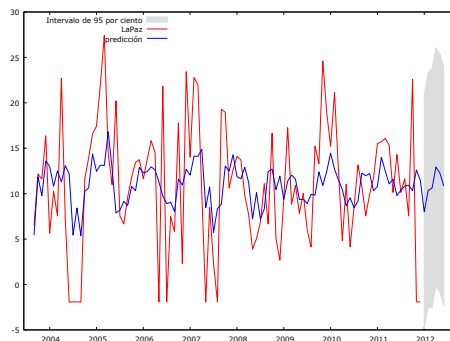
Modelo  $ARIMA(1,0,0) \times (2,0,0)_{12} - ARCH(1): \sigma_t^2 = 15,5643 + 0,106098 \cdot A_{t-1}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Cf. ARCH
jul-12	10,162328	1,94 - 18,39	16,587594	-36,5 - 69,7
ago-12	10,933447	2,54 - 19,33	17,351257	-36,1 - 70,8
sep-12	9,772468	1,37 - 18,18	17,440943	-36,0 - 70,9
oct-12	11,989155	3,58 - 20,40	17,451476	-36,0 - 70,9
nov-12	11,131153	2,73 - 19,54	17,452713	-36,0 - 70,9
dic-12	10,330413	1,92 - 18,74	17,452858	-36,0 - 70,9

**Gráfico/Tabla N°11: Serie procedente de La Paz**

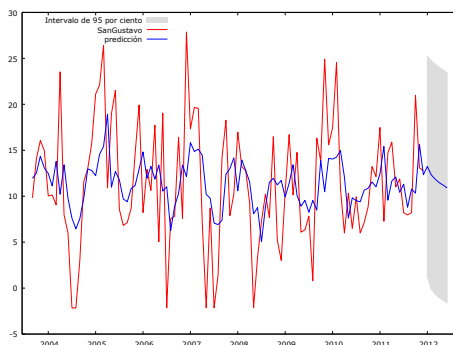
Modelo  $ARIMA(0,0,5) \times (2,0,0)_{12} - ARCH(2): \sigma_t^2 = 31,6122 + 0,174973 \cdot A_{t-1}^2 + 0,0896591 \cdot A_{t-2}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Cf. ARCH
ene-12	7,98768	-4,84 - 20,82	81,82546811	-36,6 - 194,1
feb-12	10,350587	-2,60 - 23,31	61,96249411	-58,4 - 175,9
mar-12	10,603828	-2,50 - 23,70	49,79036131	-69,5 - 165,9
abr-12	12,928227	-0,17 - 26,03	45,87967035	-72,8 - 162,8
may-12	12,274031	-0,83 - 25,38	44,10406254	-74,1 - 161,5
jun-12	10,85293	-2,32 - 24,03	43,44275009	-74,6 - 161,0

**Gráfico/Tabla N°12: Serie procedente de San Gustavo**

Modelo  $ARIMA(1,0,1) \times (2,0,0)_{12} - ARCH(1): \sigma_t^2 = 33,4266 + 0,105818 \cdot A_{t-1}^2$



Mes/Año	Pred. ARIMA	Int. Cf. ARIMA	Pred. ARCH	Int. Cf. ARCH
ene-12	13,232194	1,25 - 25,22	33,16502	-66,9 - 133,9
feb-12	12,320301	-0,10 - 24,74	36,325628	-64,0 - 138,0
mar-12	11,856326	-0,65 - 24,36	37,136015	-63,6 - 138,4
abr-12	11,475287	-1,05 - 23,99	37,3438	-63,6 - 138,4
may-12	11,20557	-1,32 - 23,73	37,397077	-63,6 - 138,4
jun-12	10,91163	-1,61 - 23,44	37,410737	-63,6 - 138,4

## 11. Discusión

La hipótesis que plantea existencia de estructura ARCH/GARCH en los errores asociados a ciertas series de precipitaciones se corroboró, como sugiere Bollerslev (1986), a través de la utilización de la ACF y de la PACF de los cuadrados de los residuos y de la contrastación de la hipótesis nula de ausencia de heteroscedasticidad. Este método también se utilizó para estimar los órdenes de los modelos propuestos, ajustados luego, por los criterios de selección, mostrándose así que los modelos ARCH/GARCH permiten describir la volatilidad asociada a los errores de los modelos



ARIMA estimados. Predecir la volatilidad de los errores, además de la predicción ARIMA asociada a la serie, aporta claramente mayor información sobre el posible comportamiento futuro del fenómeno, aunque éste no sea exhaustivo. Como puede apreciarse en los gráficos, los ARIMA modelan con cierta aproximación el comportamiento de la serie pero en modo alguno hay exactitud en esta estimación, por lo que lo mismo es esperable en la predicción. No obstante, contar con una región de confianza donde es posible hallar los verdaderos valores un 95% de las veces, aporta una información sustancial para nada despreciable. Análogamente ocurre con la estimación y predicción ARCH/GARCH. Desde ya que, en procesos tan sensibles al cambio, como son los meteorológicos, y en particular las precipitaciones, exponer predicciones a largo plazo puede no ser correcto, aunque ello depende, principalmente, de las características de los datos y de los modelos obtenidos, como también de los intereses del investigador. Se alcanzaron satisfactoriamente los objetivos propuestos ya que fue posible detectar la presencia de heteroscedasticidad condicional, modelarla mediante procesos ARCH/GARCH y acompañar las predicciones ARIMA con las predicciones del comportamiento esperable para la varianza de los errores.

## **12. Conclusiones**

El estudio de los modelos ARIMA propuestos para las series de precipitaciones, reveló evidencia de heteroscedasticidad condicional de los errores en seis casos, como ya se mencionó. Los modelos propuestos para los errores no presentaron órdenes altos de autorregresión. Por el contrario no se llegó más allá de un ARCH(2) y/o un GARCH(1,1). Las predicciones logradas con estos modelos mostraron convergencia rápida hacia un valor constante (cercano a la varianza no condicional). Los modelos ARCH/GARCH han sido tradicionalmente empleados en el análisis económico, como por ejemplo, en estudios inflacionarios (Engle, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, 1982), o en el análisis de la volatilidad de los mercados (Day & Lewis, 1992), o de las predicciones de la variación estocástica de ciertas series de retornos (Lamoureux & Lastrapes, 1993), y su tratamiento es imprescindible en cualquier libro de econometría. No obstante, queda reflejado en este trabajo que la naturaleza matemática/estadística de los mismos,

permite que sean muy útiles para explicar otros fenómenos ajenos a la economía, por lo que no debe dejarse de examinar su potencialidad como valiosos esquemas de estudio y análisis en otras áreas de investigación.

Como líneas futuras, debe tenerse en cuenta la exploración de otras variantes de estos modelos para estudiar la volatilidad. Por ejemplo, explorar la posibilidad de patrones estacionales en la varianza de los errores puede aportar información sustancial sobre la naturaleza de estos procesos. Un aspecto de interés es la incorporación de otras variables meteorológicas al estudio de las precipitaciones (temperatura, humedad, presión atmosférica, etc.), y analizar posibles relaciones dinámicas y contemporáneas entre ellas mediante la confección de modelos ARMA vectoriales, VARMA, o modelos de función de transferencia-ruido. Se continuará estos lineamientos para obtener mejores propuestas de estudio y análisis estadístico que sean de utilidad en investigaciones relacionadas.

### 13. Bibliografía

- Baillie, R., & Bollerslev, T. (1992). Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances. *Journal of Econometrics*, 91-113.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*(31), 307-327.
- Bollerslev, T. (Agosto de 1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542-547.
- Box, G., Jenkins, G., & Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. USA: Prentice-Hall International.
- Day, T., & Lewis, C. (1992). Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics*(52), 267-287.
- Engle, R. (Julio de 1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1008.
- Engle, R. (2001). GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 157-168.

- Engle, R. (2002). New Frontiers For ARCH Models. *Journal of Applied Econometrics*(17), 425-446.
- Engle, R., & Bollerslev, T. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1-50.
- Engle, R., & Ng, V. K. (Diciembre de 1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, 48(5), 1749-1778.
- Faure, O., & Scheidereiter, D. (2015). Aplicación de los Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA) a las Series de Precipitaciones de Lluvia. *RInCE*, 6(12).
- Francq, C., & Zakoian, J.-M. (2010). *GARCH Models. Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. United Kingdom: Wiley.
- Glosten, L., Jagannathan, R., & Runkle, D. (Diciembre de 1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, XLVIII(5).
- Lamoureux, C., & Lastrapes, W. (Abril de 1993). Forecasting Stock-Return Variance: Toward and Understanding of Stochastic Implied Volatilities. *Review of Financial Studies*, 6(2), 293-326.
- Mauricio, J. A. (2007). *Introducción al Análisis de Series Temporales*. Recuperado el 20 de Febrero de 2013, de <http://www.ucm.es/info/ecocuan/jam/JAM-IAST-Libro.pdf>
- Nelson, D. (Marzo de 1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
- Shumway, R., & Stoffer, D. (2011). *Time Series Analysis and its Applications*. New York: Springer.
- Tsay, R. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. United States of America: Wiley.
- Wei, W. W. (2006). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. U.S.A.: Pearson Addison Wesley.

- <sup>i</sup> Una serie de tiempo es una sucesión de observaciones tomadas secuencialmente en el tiempo (Box, Jenkins, & Reinsel, 1994).
- <sup>ii</sup> Estos procesos tienen media cero, son no correlacionados, con varianza condicional no constante, pero con varianza incondicional constante (Engle, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, 1982).
- <sup>iii</sup> Tales modelos inspiraron otros derivados como los IGARCH (Engle & Bollerslev, Modelling the Persistence of Conditional Variances, 1986). También EGARCH (Nelson, 1991), modelos asimétricos (Glosten, Jagannathan, & Runkle, 1993), Rabemananjara y Zakoian (1993), Engle y Ng (1993) y modelos de potencia como los de Higgins y Bera (1992), Ding, Granger y Engle (1993) y además los SWARCH, STARCH, QARCH, entre otros (Engle, New Frontiers For ARCH Models, 2002).
- <sup>iv</sup> La forma de los correlogramas también sugiere los órdenes  $p$  y  $q$  del modelo GARCH, siguiendo para ello la metodología propuesta por Box y Jenkins (1976) (Bollerslev, A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, 1987).
- <sup>v</sup> Detalles más profundos sobre la predicción con estos modelos puede consultarse en el artículo de Richard Baillie y Tim Bollerslev citado en la bibliografía de este documento.
- <sup>vi</sup> Software de análisis econométrico.
- <sup>vii</sup> Para detalles de la predicción con modelos ARIMA, puede consultarse *Time Series Analysis. Univariate and multivariate methods* de William Wei, citado en la bibliografía, entre otros.
- <sup>viii</sup> Región de confianza de la predicción al 95%.
- <sup>ix</sup> Las predicciones ARIMA se realizan con modelos estimados sobre las series transformadas con la transformación de Box-Cox. Por lo que cada número debe anti-transformarse para obtener el verdadero valor en milímetros para la cantidad mensual acumulada de lluvia. Puede consultarse los detalles en la siguiente publicación de la editorial edUTecNe:  
[http://www.edutecne.utn.edu.ar/trabajo\\_final/tesis\\_Scheidereiter.pdf](http://www.edutecne.utn.edu.ar/trabajo_final/tesis_Scheidereiter.pdf)