Fecha de recepción: 28 de octubre de 2018
Fecha de aceptación y versión final: 28 de diciembre de 2018

RInCE - Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La Universidad Nacional de la Matanza

Artículo de investigación

Aplicación de la Teoría de los Residuos de las Funciones Complejas a los Modelos Autorregresivos. Ejemplos en Econometría[1]

(1) Guillermo Daniel Scheidereiter, (2) Omar Roberto Faure [2]

Resumen:
Se presenta aquí un trabajo donde se estudia los residuos de la función compleja $\xi(z) = \frac{1}{\varphi_p(z)}$ que se define como operador complejo de un proceso autorregresivo de orden p, con polinomio autorregresivo en variable compleja $\varphi_p(z)$. Se encontró que los residuos de $\xi(z)$ tienen módulo mayor que $\frac{1}{p}$ cuando el proceso $AR(p)$ cumple ciertas condiciones de estacionariedad. Además, se define la variable aleatoria S, "suma de los módulos de los residuos de la función $\xi(z)$ asociada a un proceso $AR(p)$" y se determinó que $S > 1$ bajo iguales condiciones. Se establecen propiedades que prueban lo observado y se determinó que S tiene una distribución de Pareto con parámetros $\beta = 1$ y $x_0 = 1$ para el caso $AR(1)$ y $\beta = 1{,}4$ y $x_0 = 1$ para procesos $AR(2)$. Se concluye que el estudio aporta información complementaria sobre la estacionariedad de los procesos autorregresivos abriendo una línea de trabajo alternativa.

---

[1] Este trabajo de investigación es parte de la continuación de las líneas de estudio derivadas de los artículos "Aplicación de los Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA) a las Series de Precipitaciones de Lluvia" (2015, *RInCE*, 6(12)) y "Estudio de la Varianza de los Errores de Modelos ARIMA Asociados a Series de Precipitaciones: Modelos ARCH/GARCH" (2017, *RInCE*, 8(15)), debidamente citados en la bibliografía.

[2](1) Guillermo Daniel Scheidereiter, Facultad Regional Concordia, Universidad Tecnológica Nacional, correo de contacto: danielscheidereiter@gmail.com ; (2) Omar Roberto Faure, Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional, correo de contacto: ofaure@frcu.utn.edu.ar

Palabras Claves: Residuos de funciones complejas, Modelos Autorregresivos, Estacionariedad, Distribución de Pareto, Análisis Complejo.

Title: Application of the Theory of Residues of Complex Functions to Autoregressive Models. Examples in Econometrics.

Abstract: We present here a work that studies the residuals of the complex function $\xi(z) = \frac{1}{\varphi_p(z)}$ that is defined as a complex operator of an autoregressive process of order p, with autoregressive polynomial in complex variable $\varphi_p(z)$. It was found that the residuals of $\xi(z)$ have a modulus greater than $\frac{1}{p}$ when the $AR(p)$ process meets certain stationarity conditions. In addition, we define the random variable S, "sum of the modules of the residuals of the function $\xi(z)$ associated with an $AR(p)$ process" and it was determined that $S > 1$ under the same conditions. Properties that prove the observed are established and it was determined that the random variable S has a Pareto distribution of parameters $\beta = 1$ and $x_0 = 1$ for the case $AR(1)$ and $\beta = 1.4$ and $x_0 = 1$ for $AR(2)$ processes. It is concluded that the study provides complementary information on the stationarity of autoregressive processes, opening an alternative line of work.
Key words: Residues of complex functions, Autoregressive Models, Stationery, Pareto distribution, Complex Analysis.

Título: Aplicação da Teoria dos Residuos das Funções Complexas dos Modelos Autorregressivos. Exemplos em Econometria.

Resumo: Apresenta-se aquí um trabalho onde se estuda os resíduos da função complexa $\xi(z) = \frac{1}{\varphi_p(z)}$ que define-se como operador complexo de um processo autorregressivo de orden p, com polinômio autorregresivo em variavel complexa $\varphi_p(z)$. Encontrou-se que os residuos de $\xi(z)$ têm módulo maior que $\frac{1}{p}$ quando o proceso $AR(p)$ cumpre certas condições de estacionariedade. Além disso, se define a variável aleatória S 'soma dos módulos dos residuos da função $\xi(z)$ associada a um processo $AR(p)$' e determinou-se que $S > 1$ baixo iguais condições. Se estabelecem propriedades que provam o observado e se determinou que S tem uma distribuição de Pareto com parâmetros $\beta = 1$ e $x_0 = 1$ para o caso $AR(1)$ e $\beta = 1.4$ e $x_0 = 1$ para processos $AR(2)$. Se conclui que o estudo contribui informação complementaria sobre la estacionariedade dos processo autorregressivos abrindo uma línha de trabalho alternativa.

Palavras chaves: Residuos de funções complexas, Modelos Autorregressivos, Estacionariedade, Distribuição de Pareto, Análises Complexos.

Desarrollo

Elección del Tema:

Considérese un modelo autorregresivo de orden p, $AR(p)$, con ecuación:

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + A_t \quad (1)$$

donde A_t es un proceso de ruido blanco con media cero, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son los coeficientes del modelo y α es la constante. La ecuación (1) puede escribirse (Shumway & Stoffer, 2011):

$$y_t - \alpha = \phi_1(y_{t-1} - \alpha) + \phi_2(y_{t-2} - \alpha) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \alpha) + A_t.$$

Haciendo $w_t = y_t - \alpha$ resulta:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \cdots + \phi_p w_{t-p} + A_t \quad (2)$$

Utilizando el operador de retardos, $B^d w_t = w_{t-d}\ con\ d \in \mathbb{Z}_{>1}$, queda:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) w_t = A_t \quad (3)$$

donde $\varphi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ es el polinomio autorregresivo de orden p, que convenientemente puede escribirse en términos de la variable compleja z:

$$\varphi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p \quad (4)$$

Considérese ahora el operador complejo del modelo que se obtiene de (3):

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p} \quad (5)$$

y nómbrese $z_1, z_2, \ldots, z_p$ a los ceros del polinomio complejo $\varphi_p(z)$. Estos ceros serán los polos de $\xi(z)$ que tendrá una representación en serie de Laurent y un residuo c_{-1}^j para $j = 1, \ldots, p$ en cada polo. Cada modelo autorregresivo de orden p tendrá asociado un operador $\xi(z)$ con p residuos y, por lo tanto, se propone en este trabajo, estudiar el comportamiento de estos residuos.

Definición del problema:

El objeto de estudio serán los residuos c_{-1}^j para $j = 1, \ldots, p$ del operador complejo definido en (5). Mediante las técnicas del Análisis Complejo y la Teoría de Probabilidades, y considerando a cada c_{-1}^j como una variable aleatoria, se intenta conocer cuál es el comportamiento de estos objetos cuando el proceso autorregresivo es estacionario y si puede hallarse una variable resumen para los residuos del operador $\xi(z)$ (entendida ésta última como una variable aleatoria que depende de los parámetros $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$), tal que la misma siga una distribución de probabilidad conocida.

Antecedentes (marco teórico conceptual):

Como se menciona en el párrafo anterior, se utilizará técnicas de Análisis Complejo y Teoría de Probabilidades, por lo que se introduce brevemente algunos de los conceptos y resultados que dan marco a los desarrollos que seguirán. Los detalles y demostraciones pueden consultarse en la bibliografía citada al final del documento.

Parte 1. Un conjunto abierto[i] Δ en el plano complejo es *conexo* si en cualquier división del mismo en dos subconjuntos no vacíos disjuntos Δ_1 y Δ_2, al menos uno de estos conjuntos contiene un punto de acumulación[ii] del otro conjunto (Markushevich, 1970). Un conjunto abierto y conexo es un *dominio* (Churchill & Brown, 1992).

Por otro lado, la ecuación de un arco γ en el plano complejo está dada por $z(t) = x(t) + iy(t)$ donde $a \leq t \leq b$ y $x(t), y(t)$ son funciones continuas. Un arco es *simple*, o *arco de Jordan*, si $z(t_1) = z(t_2)$ solo para $t_1 = t_2$. Un arco es una *curva cerrada* si sus puntos finales coinciden $z(a) = z(b)$ (Ahlfors, 2013). Una curva γ es *regular a trozos* en $[a, b]$ si posee derivada acotada en todo $[a, b]$ excepto (quizás) en un número finito de puntos (Apostol, 2009).

Sea $f(z)$ una función *analítica*[iii] en un dominio anular $r < |z - z_0| < R$, y sea γ cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0, orientado positivamente, contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (6)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

La forma (6) se llama *serie de Laurent* (Churchill & Brown, 1992).

Además, si f es una función *analítica* en $|z - z_0| < R$, se dice que f tiene en z_0 un *cero* de orden m si $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde g es *analítica* en z_0 y $g(z_0) \neq 0$. Considérese ahora una función que es *analítica* en un entorno de z_0, excepto posiblemente en el mismo z_0. Esto es, $f(z)$ es *analítica* en la región $0 < |z - z_0| < R$. El punto z_0 es llamado una *singularidad aislada* de $f(z)$. Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, se dice que el punto z_0 es un *polo*[iv] de $f(z)$ (Ahlfors, 2013).

El coeficiente c_{-1} que multiplica a $(z - z_0)^{-1}$ en el desarrollo dado en (6) para $f(z)$, que se obtiene de (7) haciendo $n = -1$, se llama *residuo* de f en z_0:

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz. \quad (8)$$

Si γ es una curva cerrada regular a trozos cuya gráfica no contiene a z_0, entonces

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \quad (9)$$

se llama número de giros (o índice) de γ con respecto a z_0. Supóngase, por otro lado, que $f(z)$ es *analítica* en un disco abierto Δ, y sea γ una curva cerrada en ese abierto. Para algún punto z_0 que no pertenece a γ

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} \quad (10)$$

donde $n(\gamma, z_0)$ está definido por (9) CITATION Ahl13 \l 11274 | (Ahlfors, 2013)}. Cuando $n(\gamma, z_0) = 1$, se obtiene la forma de uso más frecuente:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \quad (11)$$

En Análisis Complejo, (10) y (11), se conocen como la *fórmula integral de Cauchy*.

Parte 2. Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución *gamma* con parámetros α y β $(\alpha > 0 \text{ y } \beta > 0)$ si X tiene una distribución continua cuya función de densidad de probabilidad $f(x|\alpha, \beta)$ se especifica como sigue (Degroot, 1988):

$$f(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \; para \; x > 0, \\ 0 \; para \; x \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$, es la función gamma definida para $\alpha > 0$. Una variable aleatoria X con una distribución gamma de parámetros $\alpha = 1$ y β, se dice que tiene una distribución exponencial con parámetro β:

$$f(x|\beta) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} \; para \; x > 0 \\ 0 \; para \; x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Por otro lado, una variable aleatoria X tiene una *distribución de Pareto con parámetros* x_0 y β $(x_0 > 0 \text{ y } \beta > 0)$ si X tiene una distribución continua cuya función de densidad de probabilidad $f(x|x_0, \beta)$ es la siguiente (Degroot, 1988):

$$f(x|x_0, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta x_0^\beta}{x^{\beta+1}} \; para \; x \geq x_0 \\ 0 \; para \; x < x_0 \end{cases} \quad (14)$$

Además, el estimador de máxima verosimilitud para β en la distribución de Pareto, conocido x_0, viene dado, para una muestra aleatoria de tamaño n, por (Johnson & Kotz, 1970):

$$\hat{\beta} = n \left[\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{X_j}{x_0}\right) \right]^{-1} \quad (15)$$

Si la variable aleatoria X se distribuye según una distribución de Pareto con parámetros x_0 y β, entonces la variable $W = 2\beta \ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$ tiene una distribución exponencial[v] de parámetro $\beta = \frac{1}{2}$ lo que es equivalente a una gamma de parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$.

Justificación:

Considérese un *modelo autorregresivo de orden p*, $AR(p)$, de la forma

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + A_t \qquad (16)$$

donde $\{y_t\}$ es un proceso estacionario[vi], $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ son constantes $(\phi_p \neq 0)$, $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$ con μ siendo la media del proceso y $\{A_t\} \sim iid(0, \sigma^2)$. Se considera el modelo escrito en la forma dada en (2). El proceso es estacionario cuando las raíces de la ecuación $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$ están fuera del círculo unitario (Wei, 2006). De (5) y de (8) es claro que:

$$c_{-1}^{j} = \underset{z=z_j}{Res}\, \xi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{-\phi_p \left(-\frac{1}{\phi_p} + \frac{\phi_1}{\phi_p} z + \cdots + z^p \right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{-\phi_0 \left(\frac{1}{\phi_0} - \frac{\phi_1}{\phi_0} z - \cdots - \frac{\phi_p}{\phi_0} z^p \right)} \qquad (17)$$

donde, para $j = 1, \ldots, p$, γ_j es un contorno cerrado simple que contiene a z_j y se denota por c_{-1}^{j} al residuo de $\xi(z)$ en el polo z_j. Es inmediato que c_{-1}^{j} depende de los parámetros $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p$ donde $\phi_0 = 1$, pues cada polo z_j de $\xi(z)$ es un cero de $\varphi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$. De la teoría de polinomios de variable compleja, se sabe que (Rey Pastor, Pi Calleja, & Trejo, 1952), si $\left| \frac{\phi_p}{\phi_0} \right| < \frac{1}{M^n}$ para n natural y $M > 0$, suficientemente grande, existe alguna raíz z_j de $\varphi_p(z)$ tal que $|z_j| > M$, donde $\phi_0 = 1$, y un residuo que tiende a cero. Por otro lado, si las razones de los h primeros coeficientes $\phi_p, \phi_{p-1}, \phi_{p-2}, \ldots, \phi_{p-h+1}$ al último, ϕ_0, tienden a cero, hay h raíces que tienden a infinito. De (17), $|c_{-1}^{j}|$ se hará más grande que algún $N > 0$ cuando los parámetros $\phi_1, \ldots, \phi_p$ tiendan a cero *simultáneamente* (puntualmente ϕ_p tiende a cero pero $\phi_p \neq 0$), pues $z_1, \ldots, z_p$ tienden a infinito. Alternativamente, si $\left| \frac{\phi_0}{\phi_p} \right| < \varepsilon^n$ para n natural y $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe alguna raíz z_j de $\varphi_p(z)$ tal que $|z_j| < \varepsilon$, donde $\phi_0 = 1$. Además, si las razones de los h últimos

ISSN 1851-3239 - http://rince.unlam.edu.ar

coeficientes $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{h-1}$ al primero, ϕ_p, tienden a cero, hay h raíces que tienden a cero. Por lo que $\left|c_{-1}^j\right| < \delta$, para $\delta > 0$ y tan pequeño como se desee, siempre que los parámetros $\phi_1, \dots, \phi_p$ superen en módulo a cierto $N > 0$. En términos intuitivos, cuanto más se aleja un modelo $AR(p)$ del equilibrio estacionario, el módulo de los residuos de $\xi(z)$ tiende a cero. Estos resultados hacen presumir que hay características que observar de los residuos de $\xi(z)$ y, por lo tanto, justifican la necesidad de estudiarlos.

Limitaciones:

El presente trabajo busca explicar el comportamiento de los residuos del operador complejo definido en (5), asociado a un modelo autorregresivo de orden p. Además, se propone determinar cómo se distribuyen estos residuos sólo cuando el proceso autorregresivo es de orden 1 y 2 y cumple ciertas condiciones de estacionariedad. No se extiende el estudio probabilístico a modelos de orden superior a 2. Tampoco se generalizan conclusiones a procesos más generales que los autorregresivos ni se establecen métodos de contrastes de estacionariedad, que permitan obtener una prueba para decidir cuándo un determinado conjunto de datos proviene de un proceso estacionario.

Alcances del Trabajo:

El interés aquí es, principalmente, conocer el comportamiento ergódico de los residuos c_{-1}^j, para $j = 1, \dots, p$, del operador complejo $\xi(z)$, asociado a un proceso autorregresivo estacionario de orden p. Se proponen propiedades que fundamentan lo que se observa sobre el comportamiento de estos residuos, y se busca, mediante las técnicas de bondad de ajuste, la distribución de probabilidad de una variable que resuma la información que aportan los residuos de $\xi(z)$ cuando el proceso autorregresivo es de orden 1 y 2.

Objetivos:

El objetivo principal es observar los patrones de comportamiento de los residuos del operador complejo $\xi(z)$ asociado a un proceso autorregresivo estacionario de cierto orden p y establecer las condiciones que fundamentan tales observaciones. Por otro lado, se busca obtener la distribución de probabilidad de una variable aleatoria resumen de los residuos de $\xi(z)$, cuando el orden de autorregresividad es 1 y 2, a los efectos de estudiar cómo se distribuye esta variable.

Hipótesis:
Se proponen tres hipótesis de estudio. I. Dado un proceso $AR(p)$ estacionario, tal que ϕ_p es significativamente distinto de cero, $|\phi_p| + \cdots + |\phi_1| < 1$, y las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_p$ del polinomio $\varphi_p(z)$ tengan orden de multiplicidad igual a uno, el módulo de cada residuo de $\xi(z)$ es mayor que $\frac{1}{p}$. II. Bajo las mismas condiciones de la hipótesis I, la suma de los módulos de los residuos del operador complejo $\xi(z)$, es mayor que 1. III. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria "*suma de los módulos de los residuos de* $\xi(z)$" cuando el proceso tiene órdenes 1 y 2, es una distribución de Pareto con cierto parámetro de forma β y parámetro de situación $x_0 = 1$.

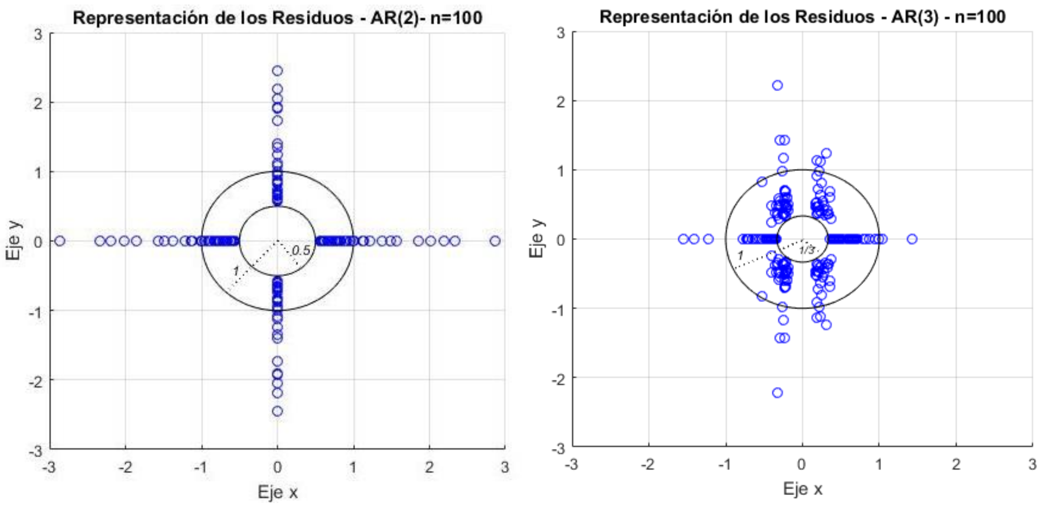
Material y Métodos:
Parte 1. Se considera a los residuos del operador complejo $\xi(z)$ definido en (5) como una variable aleatoria cuyos valores se obtienen generando parámetros aleatorios $\phi_1, \ldots, \phi_p$ que producen modelos autorregresivos estacionarios. En efecto, para cada modelo generado, existe una función distinta $\xi(z)$ que tiene sus polos en los ceros del polinomio $\varphi_p(z)$ y una serie de Laurent asociada a cada polo. Utilizando un software de cálculo computacional se determina los residuos en los polos de cada $\xi(z)$ obtenida y se grafica los mismos en el plano complejo, con el propósito de observar sus patrones de comportamiento.
Parte 2. Se define la variable aleatoria "*suma de los módulos de los residuos del operador complejo* $\xi(z)$ *de un proceso* $AR(p)$", que en adelante se llamará S. Por ejemplo, si el proceso es un $AR(1)$, entonces $S = |c_{-1}|$, donde $\xi(z) = \frac{1}{1-\phi_1 z}$ con $|\phi_1| < 1$. En el caso de un proceso $AR(2)$, será $S = |c_{-1}^1| + |c_{-1}^2|$, donde $\xi(z) = \frac{1}{1-\phi_1 z - \phi_2 z^2}$ y para un $AR(3)$, $S = |c_{-1}^1| + |c_{-1}^2| + |c_{-1}^3|$, etc. Se estudia la

distribución de probabilidad de la variable aleatoria S para procesos $AR(1)$ y $AR(2)$, a partir de la generación de parámetros aleatorios, tal que para un $AR(1)$, $|\phi_1| < 1$ y $\phi_1 \neq 0$, y para un $AR(2)$, ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la condición de que ϕ_2 es significativamente distinto de cero, $|\phi_2| < 1$ y $|\phi_2| + |\phi_1| < 1$. Se grafican los histogramas de probabilidad para la transformación $W = 2\beta \ln\left(\frac{S}{x_0}\right)$ en cada caso y se realiza una prueba de bondad de ajuste sobre la variable aleatoria S basada en el estadístico de *Kolmogorov-Smirnov*, para contrastar la hipótesis nula en la que se propone para S una distribución de Pareto con parámetro de forma β que se estima mediante (15) y parámetro de situación $x_0 = 1$.

Resultados:

Parte 1. Mediante la generación de parámetros aleatorios $\phi_1, \dots, \phi_p$, que satisfacen la condición de que ϕ_p es significativamente distinto de cero, $|\phi_p| + \cdots + |\phi_1| < 1$, y tal que las raíces $z_1, z_2, \dots, z_p$ del polinomio $\varphi_p(z)$ tengan orden de multiplicidad igual a uno, se observa, para más de 1000 grupos de coeficientes generados para modelos $AR(1)$, $AR(2)$ y $AR(3)$, que la variable aleatoria S tiene un valor frontera que es 1. Concretamente, $S > 1$. Bajo iguales condiciones, los siguientes gráficos muestran la geometría que revelan los residuos de la función compleja $\xi(z)$ definida en (5). Los puntos azules corresponden a cien residuos (reales y complejos) de $\xi(z)$ generados a partir de coeficientes aleatorios, ϕ_1, ϕ_2, para el caso $AR(2)$ y ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 para el caso $AR(3)$. Cuando el proceso es un $AR(2)$, los residuos no ingresan a una circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$, mientras que para un proceso $AR(3)$, se mantienen fuera de una circunferencia con centro en el origen de radio $\frac{1}{3}$. Además, es posible observar mayor densidad de residuos en las regiones concéntricas $0{,}5 < |z| < 1$ y $\frac{1}{3} < |z| < 1$, respectivamente, que en el resto del plano complejo. El caso $AR(1)$ es inmediato, pues $|c_{-1}| = \frac{1}{|\phi_1|} > 1$ $(|\phi_1| < 1)$.

Gráfico N°1: Representación de los residuos.



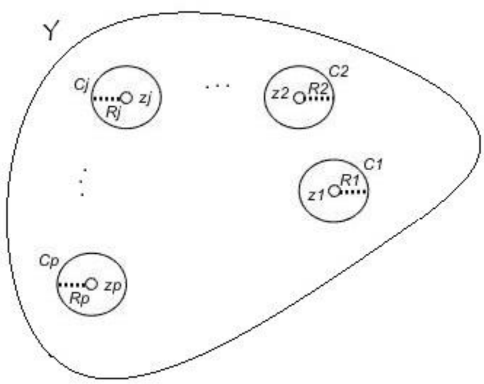
En base a estas observaciones para el operador complejo $\xi(z)$, cuando el proceso autorregresivo asociado al mismo es estacionario de orden p, con polinomio autorregresivo en variable compleja $\varphi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$, tal que $|\phi_p| + \cdots + |\phi_1| < 1$, ϕ_p es significativamente distinto de cero y las raíces $z_1, z_2, \dots, z_p$ tienen orden de multiplicidad igual a uno, se tiene el siguiente resultado:

Supóngase que Ω es un dominio simplemente conexo[vii] y que γ es un contorno cerrado simple en Ω que encierra a los ceros de $\varphi_p(z)$ y al círculo unidad. Si $\xi(z) = \frac{1}{\varphi_p(z)}$ es analítica en Ω excepto en los ceros de $\varphi_p(z)$, entonces

$$\frac{1}{p} < |c_{-1}^j| \quad (18)$$

donde c_{-1}^j $(j = 1, \dots, p)$ son los residuos de $\xi(z)$ en los polos z_j.

En efecto, supóngase que $C_1, C_2, \dots, C_p$ son circunferencias con centro en los polos simples $z_1, z_2, \dots, z_p$ de $\xi(z)$, respectivamente, totalmente contenidas en el contorno cerrado simple γ, que contiene dentro de sí al círculo unidad, y tal que cada C_j para $j = 1, \dots, p$, tiene un radio R_j suficientemente pequeño como para garantizar que las circunferencias $C_1, C_2, \dots, C_p$ son



mutuamente disjuntas. La integral de $\xi(z)$ sobre cada C_j está dada por:

$$\int_{C_j} \xi(z)\,dz = \int_{C_j} \frac{dz}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2-\cdots-\phi_p z^p} = \int_{C_j} \frac{dz}{-\phi_p(z-z_1)\ldots(z-z_j)\ldots(z-z_p)}$$

El integrando puede escribirse convenientemente para obtener:

$$\int_{C_j} \xi(z)\,dz = \int_{C_j} \frac{\overline{\frac{1}{-\phi_p(z-z_1)\ldots(z-z_p)}}}{z-z_j}dz = \int_{C_j} \frac{g_j(z)}{z-z_j}dz = 2\pi i g_j(z_j)$$

donde $g_j(z) = \frac{1}{-\phi_p(z-z_1)\ldots(z-z_p)}$ y tal que z interior a γ pertenece a una región donde no hay singularidades de $g_j(z)$. Por otro lado, sea $\overline{m_h n_k}$ un segmento que une dos puntos m_h y n_k, con $h \neq k$, que están sobre γ . Sea $d = máx\{|\overline{m_h n_k}|\}$. Entonces[viii],

$$|g_j(z)| = \left|\frac{1}{-\phi_p(z-z_1)\ldots(z-z_p)}\right| = \frac{1}{|\phi_p|.\,|z-z_1|\ldots|z-z_p|} > \frac{1}{|\phi_p|.\,d\ldots d} = \frac{1}{|\phi_p|.\,d^{p-1}}.$$

Puesto que[ix] $|\phi_p| < 1$, resulta:

$$|g_j(z)| > \frac{|\phi_p|^p}{|\phi_p|.\,d^{p-1}} = \left(\frac{|\phi_p|}{d}\right)^{p-1}$$

Además, $max_p\left(\frac{|\phi_p|}{d}\right)^{p-1} = 1$ y se alcanza para $p = 1$. En efecto, la sucesión $\{x_p\} = \left\{\left(\frac{|\phi_p|}{d}\right)^{p-1}\right\}$ es una sucesión acotada, pues $|x_p| \leq \left|\frac{1}{d^{p-1}}\right|$ porque $|\phi_p| < 1$. Además, $d \geq 2$, por lo que $|x_p| \leq \left|\frac{1}{2^{p-1}}\right|$. Puesto que $\underset{p}{máx}\left\{\frac{1}{2^{p-1}}\right\} = 1$ y los términos de $\{x_p\}$ están acotados por los términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{2^{p-1}}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\right\}$, resulta $\underset{p}{máx}\left\{\left(\frac{|\phi_p|}{d}\right)^{p-1}\right\} = 1$. Entonces,

$$1 < |g_j(z)|,$$

cualquiera sea z en el dominio de g_j. En particular, para z_j se cumple:

$$1 < |g_j(z_j)|.$$

Como

$$g_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \xi(z)\,dz = \underset{z=z_j}{Res}\,\xi(z) = c_{-1}^{j}.$$

Se obtiene:

$1 < \left|c_{-1}^{j}\right|$. (19)

Que es (18) con $p = 1$.

Se probará ahora la siguiente proposición: si $\left|g_j(z)\right| > \frac{1}{h}$, para $h \in \mathbb{N}$ y $j = 1, \dots, h$, entonces $\left|g_j(z)\right| > \frac{1}{h+1}$.

Supóngase que existe algún j tal que $\left|g_j(z)\right| \leq \frac{1}{h+1}$. Entonces, $\frac{1}{\left|g_j(z)\right|} \geq h + 1$. Como $h + 1$ es el siguiente de h, se cumple que $\frac{1}{\left|g_j(z)\right|} \geq h$. Por lo tanto, $\left|g_j(z)\right| \leq \frac{1}{h}$ lo que contradice la hipótesis.

Luego,

$$\left|g_j(z)\right| > \frac{1}{h+1}.$$

En particular,

$$\left|g_j(z_j)\right| = \left|c_{-1}^{j}\right| > \frac{1}{h+1}. \quad (20)$$

De (19), $1 < \left|c_{-1}^{j}\right|$ para $p = 1$. De (20), si $\frac{1}{h} < \left|c_{-1}^{j}\right|$, entonces $\frac{1}{h+1} < \left|c_{-1}^{j}\right|$. Por el principio de inducción, para cualquier $p \in \mathbb{N}$ y $j = 1, \dots, p$:

$$\frac{1}{p} < \left|c_{-1}^{j}\right|.$$

Es inmediata la siguiente proposición:

Los residuos c_{-1}^{j} $(j = 1, \dots, p)$, del operador complejo $\xi(z) = \frac{1}{\varphi_p(z)}$ satisfacen:

$$1 < \sum_{j=1}^{p} \left|c_{-1}^{j}\right|. \quad (21)$$

Esta desigualdad no requiere demostración, pues $\left|c_{-1}^{1}\right| + \left|c_{-1}^{2}\right| + \cdots + \left|c_{-1}^{p}\right| > p.\frac{1}{p} = 1$.

Parte 2. Los siguientes gráficos corresponden a los histogramas de probabilidad de la variable aleatoria $W = 2\beta ln\left(\frac{S}{x_0}\right)$, para $n = 1000$ conjuntos de parámetros aleatorios para modelos $AR(1)$ y $AR(2)$. En cada caso, se adjunta una tabla con la prueba de bondad de ajuste de *Kolmogorov-Smirnov* sobre la variable S a un $0{,}05$ de significancia.

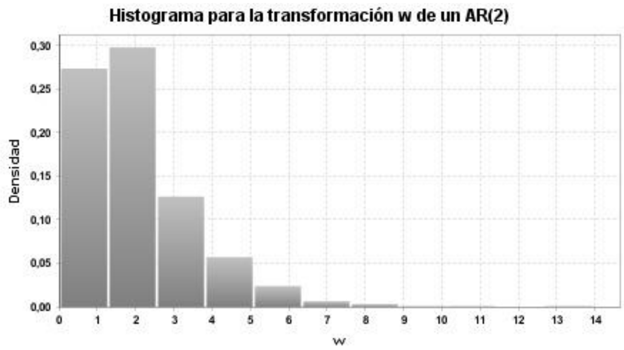
ISSN 1851-3239 - http://rince.unlam.edu.ar

Gráfico N°2: Histograma y Bondad de Ajuste. Caso $AR(1)$.

Modelo	$\boldsymbol{AR(1)}$
Bondad de Ajuste	$H_0: S \sim Pareto(1,1)$
Tamaño de Muestra	1000
K-S	0,003
Valor Crítico	0,0430

Para un proceso $AR(1)$, mediante (15) se obtuvo $\hat{\beta} = 1$ y por (21), se propone como parámetro de situación $x_0 = 1$. Puesto que el estadístico de *Kolmogorov-Smirnov*, $K - S$, es menor que el valor crítico obtenido por tabla, se determina que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de una distribución de Pareto de parámetros de situación $x_0 = 1$ y de forma $\beta = 1$ para la variable aleatoria S, a un nivel de significancia de $0{,}05$. Es inmediato que la variable $W = 2\beta \ln\left(\frac{S}{x_0}\right) \sim gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)$ que es una distribución exponencial de parámetro $\frac{1}{2}$.

Gráfico N°3: Histograma y Bondad de Ajuste. Caso $AR(2)$.



Modelo	$\boldsymbol{AR(2)}$
Bondad de Ajuste	$H_0: S \sim Pareto(1{,}4; 1)$
Tamaño de Muestra	1000
K-S	0,024
Valor Crítico	0,0430

Empleando (15) se estimó, en el caso $AR(2)$, un parámetro de forma $\hat{\beta} = 1{,}4$ para la distribución de Pareto y se tomó como parámetro de situación $x_0 = 1$. El estadístico de *Kolmogorov-Smirnov* es inferior al valor crítico obtenido y, por lo tanto, se concluye que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula a un $0{,}05$ de significancia.

Discusión:

Sobre lo desarrollado en las páginas anteriores, caben algunas consideraciones de interés. El siguiente gráfico muestra la evolución del precio del Dólar (oficial) en Pesos Argentinos desde inicios de 2016 hasta julio de 2018.

Sobre este conjunto de datos, se define la variable "*logaritmo de la evolución del precio del dólar en pesos argentinos*" y teniendo en cuenta la metodología ARIMA se introduce un orden de diferenciación regular y una estructura autorregresiva regular de orden $p = 2$. En base a los criterios de información de Akaike, Bayesiano de Schwarz y de Hannan-Quinn y de la información que aportan los correlogramas de las funciones de autocorrelación simple y parcial, se descartan órdenes de media móvil para la parte regular y de autorregresividad y media móvil para la parte estacional. Se estima el siguiente modelo escrito en términos del operador de retardos:

$$(1 - B)(1 - 0{,}267728B + 0{,}143342B^2)y_t = A_t$$

El operador complejo de la estructura autorregresiva, *sin tener en consideración el factor asociado a la diferenciación regular*, es

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - 0{,}267728.z + 0{,}143342.z^2}$$

Es fácil determinar, cuando $\varphi_2(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$, los residuos de $\xi(z)$ a partir de que sus polos serán $z_j = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$ para $j = 1{,}2$ y $\underset{z=z_j}{Res}\ \xi(z) = c_{-1}^j = \lim_{z \to z_j}(z - z_j)\,\xi(z)$. Así:

$$c_{-1}^{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}$$

Por lo tanto, los residuos de $\hat{\xi}(z)$ serán $c_{-1}^{1,2} = \pm 1{,}4118i$. Esto implica que el valor observado para la suma de los módulos de los residuos es $\hat{S} = |c_{-1}^1| + |c_{-1}^2| = 2{,}8237$. Puesto que la variable S sigue una distribución de Pareto, la variable aleatoria $W = 2\beta \ln\left(\frac{S}{x_0}\right)$ sigue una distribución exponencial de parámetro $0{,}5$ y puede obtenerse el transformado del valor observado, $\hat{W} = 2.1{,}4.\ln\left(\frac{2{,}8237}{1}\right) = 2{,}9065$. Por lo tanto, $P(W \leq 2{,}9065) = 0{,}7662$ lo que pesa a favor de la suposición de estacionariedad para la estructura autorregresiva asociada al operador $\xi(z)$.

Por otro lado, supóngase que se considera los dos primeros retardos de la función de autocorrelación de la serie correspondiente a los valores trimestrales en millones de pesos a precios del 2004, del Producto Interno Bruto de Argentina, desde el primer trimestre de 2004 hasta el cuarto trimestre de 2017[x]:

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	0,7221	***	0,7221	***	30,7894	[0,000]
2	0,6883	***	0,3488	***	59,2877	[0,000]

Si se presume una estimación por el método de momentos para los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2 de un *posible* $AR(2)$ como modelo candidato a recoger la estructura autorregresiva del proceso[xi], se obtiene $\hat{\phi}_1 \cong 1{,}2191$ y $\hat{\phi}_2 \cong 1{,}2097$ y el operador complejo estimado es

$$\hat{\xi}(z) = \frac{1}{1 - 1{,}2191.z - 1{,}2097.z^2}$$

Los residuos son $c_{-1}^{1,2} = \pm 0{,}3976$. En principio, obsérvese que $S = |c_{-1}^1| + |c_{-1}^2| = 0{,}7952 < 1$ y $\left|c_{-1}^{1,2}\right| < 0{,}5$ lo que contradice lo establecido en (21) y (18), respectivamente. Además, el valor observado para la variable W es

$\widehat{W} = 2.1{,}4.\ln\left(\frac{0{,}7952}{1}\right) = -0{,}6417$ y, por lo tanto, $P(W \leq -0{,}6417\,) = 0.$ Esta serie es un clásico ejemplo de un proceso no estacionario.

Como última observación, es de interés mencionar que si se tiene un paseo aleatorio, $y_t = y_{t-1} + A_t$, el operador complejo asociado es $\xi(z) = \frac{1}{1-z}$ que tiene un polo en $z = 1$ y $S = |c_{-1}| = 1.$

Conclusiones:

Una consecuencia inmediata de (18) es que cuando p tiende a incrementar su valor, los residuos del operador $\xi(z)$ buscan agruparse cerca de cero pero siempre con una frontera dada por la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{p}$. Este resultado se cumple siempre que se considere la clase de procesos autorregresivos tal que $|\phi_p| + \cdots + |\phi_1| < 1$, ϕ_p sea significativamente distinto de cero y las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_p$ tengan orden de multiplicidad igual a uno. Es preciso señalar que además de que el coeficiente ϕ_p tiene que ser significativamente distinto de cero, no debe perder representatividad en la estructura con respecto a los otros parámetros[xii]. El corolario donde se enuncia la condición (21) resulta fundamental para establecer el parámetro de situación de la distribución de Pareto propuesta para la variable aleatoria $S.$ Conocer la forma en la que se distribuye la suma de los módulos de los residuos como variable que agrupa en una sola medida la información que aportan los p residuos de $\xi(z)$, es importante para tener idea, a priori, de la *posible* estacionariedad de un proceso. Debe tenerse en cuenta, no obstante, que (21) no implica que un proceso no estacionario tenga siempre un valor observado de S inferior o igual a 1. Por ejemplo, si $\varphi_3(z) = 1 + 0{,}3z + 0{,}6z^2 + 0{,}8z^3$, el operador $\xi(z)$ permite obtener $\hat{S} = 1{,}11531 > 1$, sin embargo el proceso que genera $\xi(z)$ no es estacionario. *Las consideraciones mostradas en la discusión del apartado anterior no pueden usarse como contraste de estacionariedad*.

Puede observarse que el trabajo presentado aquí aporta información complementaria sobre la estacionariedad de los procesos autorregresivos abriendo una directriz de trabajo alternativa al estudio de los modelos que los describen. Como líneas futuras de investigación, se continuará con el análisis de los residuos del operador complejo asociado a un proceso autorregresivo, estudiando propiedades y aplicaciones de interés a las que el estudio resulte funcional.

Bibliografía:

Ahlfors, L. (2013). *Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Apostol, T. M. (2009). *Análisis Matemático.* Barcelona, España: Reverté.

Box, G., Jenkins, G., & Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* USA: Prentice-Hall International.

Brockwell, P., & Davis, R. (1987). *Time Series: Theory and Methods.* New York: Springer.

Brockwell, P., & Davis, R. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting.* New York: Springer.

Chatfield, C. (1995). *The Analysis of Time Series, an Introduction.* Washington, D. C.: Chapman y Hall/CRC.

Churchill, R., & Brown, J. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Degroot, M. (1988). *Probabilidad y Estadística.* Delaware, U.S.A.: Addison-Wesley Iberoamericana.Derrick, W. (1984). *Complex Analysis and Applications.* EEUU: Wadsworth, Inc.

Engle, R. (1982, Julio). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica, 50*(4), 987-1008.

Evans, M., & Rosenthal, J. (2003). *Probabilidad y Estadística.* Barcelona: Reverté.

Faure, O. R., & Scheidereiter, G. D. (2017, Agosto). Estudio de la Varianza de los Errores de Modelos ARIMA Asociados a Series de Precipitaciones: Modelos ARCH/GARCH. *RInCE, 8*(15).

Faure, O., & Scheidereiter, D. (2015). Aplicación de los Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA) a las Series de Precipitaciones de Lluvia. *RInCE, 6*(12).

Fisher, S. (2007). *Function Theory on Planar Domains.* New York: Dover Publications.Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series.* U.S.A.: Wiley.

Harvey, A. C. (1993). *Time Series Models.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Heins, M. (1962). *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Johnson, N., & Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous univariate distributions 1.* New York: Wiley.

Landro, A., & González, M. (2009). *Elementos de Econometría de los Fenómenos Dinámicos* (Vol. I). Buenos Aires: Ediciones Cooperativas.

Markushevich, A. (1970). *Teoría de las Funciones Analíticas* (Vol. I y II). Moscu: MIR.Petrov, V., & Mordecki, E. (2008). *Teoría de la Probabilidad.* Montevideo: DIRAC.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1952). *Análisis Matemático* (Vols. I, II y III). Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Shumway, R., & Stoffer, D. (2011). *Time Series Analysis and its Applications.* New York: Springer.

Spivak, M. (2005). *Calculus.* Barcelona, España: Reverté.

Walpole, R., & Freund, J. (1990). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* México: Pearson.

Wei, W. W. (2006). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods.* U.S.A.: Pearson Addison Wesley.

Zill, D., & Shanahan, P. (2009). *Introducción al Análisis Complejo con Aplicaciones.* México: CENGAGE Learning.

[i] Un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos frontera.

[ii] Se dice que z_0 es un *punto de acumulación* para un conjunto Δ, si cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de puntos pertenecientes a Δ CITATION Mar70 \l 11274 | (Markushevich, 1970)}.

ISSN 1851-3239 - http://rince.unlam.edu.ar

[iii] La *clase* de funciones analíticas está formada por las funciones complejas de una variable compleja que poseen una derivada dondequiera que se defina la función. Con igual significado se usa el término función *holomórfica* (Ahlfors, 2013).

[iv] Si en (6), $c_{-n} \neq 0$ para algún n pero $c_{-m} = 0$ para todo $m > n$, el punto z_0 se llama polo de orden n. Un polo de orden 1 se llama usualmente *polo simple* (Apostol, 2009).

[v] Puede utilizarse la *técnica de transformación de variables* explicada, entre otros, en el libro *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, de Walpole y Myers, citado en las referencias bobliográficas, para fundamentar tales afirmaciones.

[vi] En el sentido definido en *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods* de Williams Wei, Cap. 2, pág.6.

[vii] Un dominio *simplemente conexo* es un dominio tal que todo contorno cerrado simple dentro de él encierra sólo puntos de él. Cuando no es simplemente conexo se llamará *múltiplemente conexo* (Churchill & Brown, 1992).

[viii] Obsérvese que por la condición de estacionariedad de un $AR(p)$, y puesto que el círculo unidad está contenido en γ, resulta $d \geq 2$. Como caso particular, γ puede ser una circunferencia y d su diámetro.

[ix] Las características de los parámetros de procesos estacionarios puede consultarse en las referencias bibliográficas citadas al final del documento.

[x] Fuente: *INDEC (Instituto Nacional de Estadísticas y Censos*. República Argentina).

[xi] Sólo se propone tal presunción como ejemplo ilustrativo.

[xii] En este punto es importante estudiar la sobreparametrización del modelo.