

Sobre los vectores de residuos de una clase racional de funciones complejas. Aplicación a los procesos autorregresivos: ejemplos en series econométricas y en medidas de generación eléctrica.

Guillermo Daniel Scheidreiter y Omar Roberto Faure

Fecha de recepción: 24 de mayo de 2019
Fecha de aceptación y versión final: 31 de julio de 2019

**RInCE - Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias
Económicas de La Universidad Nacional de la Matanza**

Artículo de investigación

*Sobre los vectores de residuos de una clase racional de funciones complejas.
Aplicación a los procesos autorregresivos: ejemplos en series econométricas y en
medidas de generación eléctrica¹*

(1) Guillermo Daniel Scheidreiter, (2) Omar Roberto Faure ²

Resumen:

Las funciones complejas tienen múltiples usos en diversos campos de estudio, por lo que analizar sus características es de interés extensivo a otras ciencias. Este trabajo inicia con una clase particular de funciones racionales de una variable compleja; sobre éstas se deduce dos propiedades elementales relativas a los residuos y se propone un resultado que establece una cota inferior para la norma $-p$ del vector de residuos. Se presentan aplicaciones a los procesos autorregresivos ² y las ejemplificaciones se puntualizan en datos históricos de generación eléctrica y series econométricas.

Palabras Claves: Funciones complejas, residuos, normas vectoriales, procesos autorregresivos, series temporales.

¹Este trabajo de investigación es parte de la continuación de las líneas de estudio derivadas de los artículos "Aplicación de los Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA) a las Series de Precipitaciones de Lluvia" (2015, RInCE, 6(12)) y "Estudio de la Varianza de los Errores de Modelos ARIMA Asociados a Series de Precipitaciones: Modelos ARCH/GARCH" (2017, RInCE, 8(15)), debidamente citados en la bibliografía.

²(1) Guillermo Daniel Scheidreiter, Facultad Regional Concordia, Universidad Tecnológica Nacional, correo de contacto: danielscheidreiter@gmail.com; (2) Omar Roberto Faure, Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional, correo de contacto: ofaure@frcu.utn.edu.ar

Title: On the residues vectors of a rational class of complex functions. Application to autoregressive processes: examples in econometric series and in electricity generation measures.

Abstract:

Complex functions have multiple uses in various fields of study, so analyze their characteristics it is of extensive interest to other sciences. This work begins with a particular class of rational functions of a complex variable; over this is deduced two elementals properties concerning the residues and is proposed one results which establishes one lower bound for the norm-p of the residues vector. Applications to the autoregressive processes are presented and the exemplifications are indicated in historical data of electric generation and econometric series.

Key words: Complex functions, residues, vector norms, autoregressive processes, time series.

Título: Sobre os vetores de residuos de uma classe racional de funciones complejas. Aplicação a processos autoregressivos: exemplos em séries econométricas e em medidas de geração elétrica.

Resumo:

As funções complexas têm múltiplos usos em vários campos de estudo, portanto, analisar suas características é de interesse de outras ciências. Este trabalho começa com uma classe particular de funções racionais de uma variável complexa; Duas propriedades elementares relativas aos resíduos dessas funções são deduzidas e um resultado que estabelece um limite inferior para a norma-p do vetor de resíduos é proposto. Aplicações aos processos autoregressivos são apresentadas e as exemplificações são indicadas em dados históricos de geração elétrica e séries econométricas.

Palavras chaves: Funções complexas, resíduos, norma-p do vetor, processos autoregressivos, série temporal.

Elección del Tema:

Considérese la clase de las funciones racionales complejas:

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f(z) = \frac{1}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_n z^n} \quad (1)$$

que cumplen las siguientes condiciones:

(I) $\alpha_n \neq 0$ y $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| < 1$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, \dots, n$;

(II) Los polos z_1, z_2, \dots, z_n de $f(z)$ son polos simples que satisfacen $|z_j| > 1$ para $j = 1, \dots, n$.

Sea la subclase de funciones de (1):

$$f(z) = \frac{1}{1 - \alpha_1 z} \quad (2)$$

Aquí, $|\alpha_1| < 1$ y $\alpha_1 \neq 0$. El polo de $f(z)$ es $z_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ y en tal caso, el residuo en

el polo se calcula mediante:

$$Res_{z_1 = \frac{1}{\alpha_1}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\alpha_1}} \left(z - \frac{1}{\alpha_1} \right) f(z)$$

Resulta:

$$Res_{z_1 = \frac{1}{\alpha_1}} f(z) = c_{-1}^1 = -\frac{1}{\alpha_1}.$$

Puesto que $|\alpha_1| < 1$, se obtiene:

$$|c_{-1}^1| > 1 \quad (3)$$

En virtud de este resultado inmediato sobre la subclase de funciones complejas cuyo denominador tiene grado $n = 1$, es de interés estudiar las propiedades que puedan obtenerse del análisis del comportamiento de los residuos de casos más generales que (2).

Definición del problema:

El objeto de estudio son los residuos c_{-1}^j para $j = 1, \dots, n$ del tipo de funciones complejas de la forma definida en (1) que satisfacen las condiciones (I) y (II). Estas funciones tendrán tantos polos como grado

indique el polinomio del denominador y, por lo tanto, una serie de Laurent asociada a cada polo. Partiendo de (3) se analiza cuál es el patrón que siguen los residuos de estas funciones complejas para casos más generales que (2) y se plantea dar respuesta a qué propiedades cumplen los mismos en relación con las normas vectoriales.

Antecedentes (marco teórico conceptual)

Un conjunto abiertoⁱ Δ en el plano complejo es *conexo* si en cualquier división del mismo en dos subconjuntos no vacíos disjuntos Δ_1 y Δ_2 , al menos uno de estos conjuntos contiene un punto de acumulaciónⁱⁱ del otro conjunto (Markushevich, 1970). Además, si un conjunto es abierto y conexo, es un *dominio* (Churchill & Brown, 1992).

En la geometría del plano complejo, la ecuación de un arco γ está dada por $z(t) = x(t) + iy(t)$ donde $a \leq t \leq b$ y $x(t), y(t)$ son funciones reales continuas. Un arco es *simple*, o *arco de Jordan*, si $z(t_1) = z(t_2)$ solo para $t_1 = t_2$. Por su parte, un arco es una *curva cerrada* si sus puntos finales coinciden $z(a) = z(b)$ (Ahlfors, 2013). Una curva γ es *regular a trozos* en $[a, b]$ si posee derivada acotada en todo $[a, b]$ excepto (quizás) en un número finito de puntos (Apostol, 2009).

Sea $f(z)$ una función *analítica*ⁱⁱⁱ en un dominio anular $r < |z - z_0| < R$, y sea γ cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0 , orientado positivamente, contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

La forma (4) se llama *serie de Laurent* (Churchill & Brown, 1992).

Por otro lado, si f es una función *analítica* en $|z - z_0| < R$, se dice que f tiene en z_0 un *cero* de orden m si $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde g es *analítica* en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Considérese ahora una función que es *analítica* en un entorno de z_0 , excepto posiblemente en el mismo z_0 . Esto es, $f(z)$ es *analítica* en la región $0 < |z - z_0| < R$. El punto z_0 es llamado una *singularidad aislada* de $f(z)$. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, se dice que el punto z_0 es un *polo*^{iv} de $f(z)$ (Ahlfors, 2013).

El coeficiente c_{-1} que multiplica a $(z - z_0)^{-1}$ en el desarrollo dado en (4) para $f(z)$, que se obtiene de (5) haciendo $n = -1$, se llama *residuo* de f en z_0 :

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (6)$$

En la práctica, (6) se calcula según el orden de los polos de la función. En particular, si f tiene un polo simple^v en z_0 , entonces

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (7)$$

Si γ es una curva cerrada regular a trozos cuya gráfica no contiene a z_0 , entonces

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \quad (8)$$

se llama número de giros (o índice) de γ con respecto a z_0 . Supóngase, por otro lado, que $f(z)$ es *analítica* en un disco abierto Δ , y sea γ una curva cerrada en ese abierto. Para algún punto z_0 que no pertenece a γ

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (9)$$

donde $n(\gamma, z_0)$ está definido por (7) CITATION Ahl13 \[11274 \] (Ahlfors, 2013)}. Cuando $n(\gamma, z_0) = 1$, se obtiene la forma de uso más frecuente:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (10)$$

En Análisis Complejo, (9) y (10), se conocen como la *fórmula integral de Cauchy*.

Por otro lado, el conjunto $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial complejo n -dimensional que consiste en todos los vectores $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$ e i es la unidad imaginaria habitual que satisface $i^2 = -1$ (Scheidemann, 2005). Los puntos o vectores de \mathbb{C}^n pueden escribirse en la forma $z = (z_1, \dots, z_n) = x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural ≥ 1 . Las siguientes expresiones definen normas^{vi} en \mathbb{C}^n :

$$\|z\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j| \quad (11)$$

$$\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

$\|z\|_{\infty}$ se llama norma máxima (o infinito)^{vii} y $\|z\|_p$ es la norma- p (Scheidemann, 2005). Puede demostrarse que $\|z\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|z\|_p$ para todo vector z en \mathbb{C}^n . Además,

$$\|z\|_{\infty} \leq \|z\|_2 \leq \sqrt{n} \|z\|_{\infty}. \quad (13)$$

Justificación del estudio

Teniendo en cuenta la función (1) con las condiciones (I) y (II), la subclase de funciones donde el denominador es de grado $n = 2$ satisfacen el siguiente resultado:

Si

$$f(z) = \frac{1}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2}, \quad (14)$$

entonces

$$|c_{-1}^j| > \frac{1}{2} \text{ para } j = 1, 2. \quad (15)$$

Sobre los vectores de residuos de una clase racional de funciones complejas. Aplicación a los procesos autorregresivos: ejemplos en series econométricas y en medidas de generación eléctrica.

Guillermo Daniel Scheidreiter y Omar Roberto Faure

En efecto, la función tiene dos polos que dependen de los coeficientes α_1 y α_2 :

$$z_{1,2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{-2\alpha_2}.$$

En este caso,

$$\text{Res}_{z=z_{1,2}} f(z) = c_{-1}^{1,2} = \lim_{z \rightarrow z_{1,2}} \left(z - \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{-2\alpha_2} \right) \cdot f(z).$$

Desarrollando algebraicamente:

$$c_{-1}^{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}. \quad (16)$$

Como $|\alpha_1| + |\alpha_2| < 1$, implica $|\alpha_1| < 1 - |\alpha_2|$:

$$|c_{-1}^{1,2}| > \frac{1}{\sqrt{(1 - |\alpha_2|)^2 + 4\alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2|\alpha_2| + |\alpha_2|^2 + 4\alpha_2}}$$

Supóngase que $0 < \alpha_2 < 1$. Entonces,

$$|c_{-1}^{1,2}| > \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + 2\alpha_2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_2 + 1)^2}}.$$

En consecuencia,

$$|c_{-1}^{1,2}| > \frac{1}{|\alpha_2 + 1|}.$$

Puesto que $0 < \alpha_2 < 1$, es claro que $|\alpha_2 + 1| < 2$, por lo que $\frac{1}{|\alpha_2 + 1|} > 0,5$.

Luego,

$$|c_{-1}^{1,2}| > \frac{1}{2}.$$

De modo similar, puede estudiarse para $-1 < \alpha_2 < 0$.

De (15):

$$(c_{-1}^j)^2 > \frac{1}{4}.$$

Sumando cada residuo al cuadrado:

$$(c_{-1}^1)^2 + (c_{-1}^2)^2 > \frac{1}{2}$$

Tomando raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad:

$$\sqrt{(c_{-1}^1)^2 + (c_{-1}^2)^2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que $\sqrt{(c_{-1}^1)^2 + (c_{-1}^2)^2} = \|\mathbf{c}_{-1}\|_2$, donde $\mathbf{c}_{-1} = (c_{-1}^1, c_{-1}^2)$, es decir el vector cuyas componentes son los residuos de la función (14) en los polos z_1 y z_2 , se obtiene:

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_2 > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

Lo anterior muestra que la norma-2 del vector de residuos de la función (14) tiene una cota inferior. Además, $|c_{-1}^1| + |c_{-1}^2| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ y de (12):

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_1 > 1. \quad (18)$$

Por otro lado, si $|c_{-1}^j| > \frac{1}{2}$ para $j = 1, 2$, entonces $\max_{j=1,2} |c_{-1}^j| > \frac{1}{2}$. Es decir,

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty > \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Queda, por lo tanto, justificada la necesidad de estudiar qué propiedades generales cumplen los residuos de la clase de funciones (1) para un denominador con grado n . En particular, se analiza la norma- p del vector de residuos para la función definida en (1) con las condiciones (I) y (II).

Limitaciones

Supóngase que se considera la función:

$$f(z) = \frac{1}{1 - 2z + 3z^2}$$

la cual satisface (14) como forma particular de (1). En tal caso, el vector de residuos es:

$$\mathbf{c}_{-1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i, \frac{\sqrt{2}}{4}i \right)_{1 \times 2}$$

Calculando las normas se observa que no se cumplen (17), (18) y (19):

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_2 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|c_{-1}\|_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

$$\|c_{-1}\|_\infty = \max_{j=1,2} |c_{-1}^j| = \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$$

Es claro que $f(z)$ no verifica la condición (I), pues

$$|2| + |-3| > 1.$$

Tampoco se cumple la condición (II). En efecto, calculando los polos de la función:

$$z_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

es inmediato que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$.

Los resultados que se estudian aquí tienen implicancia sobre las funciones de la forma (1) que satisfacen estrictamente las condiciones (I) y (II). No se extienden los mismos a estas funciones cuando no verifican (I) y/o (II) ni tampoco a otras funciones de variable compleja.

Alcances del Trabajo

Considérese un modelo autorregresivo de orden s , $AR(s)$, con ecuación:

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_s y_{t-s} + A_t \quad (20)$$

donde A_t es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza constante, $\{A_t\} \sim iid(0, \sigma^2)$, los parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$ son los coeficientes del modelo y α es una constante tal que la media μ del modelo es:

$$\mu = \frac{\alpha}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_s}. \quad (21)$$

La ecuación (20) puede escribirse (Shumway & Stoffer, 2011):

$$y_t - \alpha = \phi_1 (y_{t-1} - \alpha) + \phi_2 (y_{t-2} - \alpha) + \dots + \phi_s (y_{t-s} - \alpha) + A_t.$$

Haciendo $w_t = y_t - \alpha$ resulta:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_s w_{t-s} + A_t$$

Utilizando el operador de retardos, $B^d w_t = w_{t-d}$ con $d \in \mathbb{Z}_{>1}$, queda:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_s B^s) w_t = A_t \quad (22)$$

Aquí $\varphi_s(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_s B^s$ es el polinomio autorregresivo de orden s , que puede escribirse en términos de la variable compleja z :

$$\varphi_s(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_s z^s \quad (23)$$

De (22) se obtiene el operador complejo del modelo:

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_s z^s} \quad (24)$$

El proceso descrito por la ecuación (20) es estacionario cuando las raíces de la ecuación $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_s z^s = 0$ están fuera del círculo unitario (Wei, 2006). Para que esto ocurra y el proceso sea estacionario en media, de (21), es suficiente que $|\phi_s| + \dots + |\phi_1| < 1$. Si además se agrega como condición que las raíces de (23) sean simples, entonces (24) satisface la forma (1) y cumple las condiciones (I) y (II).

Por lo tanto, las propiedades vectoriales de los residuos de la clase de funciones complejas estudiadas en este trabajo, alcanzan directamente a los procesos autorregresivos cuyos operadores complejos verifican (I) y (II). Por ejemplo, si se tiene un proceso autorregresivo de orden $s = 2$ estacionario, con $|\phi_1| + |\phi_2| < 1$ y tal que las raíces de la ecuación $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$ sean simples, entonces el vector de residuos c_{-1}^j para $j = 1, 2$ del operador complejo asociado

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2}$$

verifica las condiciones (17), (18) y (19).

Objetivos:

Por lo demostrado en (3) y (15), las subclases (2) y (14) de la forma general (1), que satisfacen (I) y (II), tienen residuos con propiedades vectoriales de interés. Específicamente, se muestra que el residuo de la subclase (2) es tal que $|c_{-1}^1| > 1$ mientras que el vector de residuos de la subclase (14) cumple (17), (18) y (19). Se busca, por lo tanto, una

generalización que considere las normas del vector de residuos de estas funciones complejas para cualquier grado del polinomio del denominador. Además, es importante mostrar que estos resultados se cumplen en modelos autorregresivos que se obtienen como explicación del comportamiento de series temporales provenientes de datos reales.

Hipótesis

En los párrafos anteriores se muestra que las funciones complejas aquí consideradas tienen asociados vectores de residuos cuyas normas satisfacen ciertas condiciones para dos casos particulares. Es de interés, por lo tanto, formular una conjetura que considere órdenes generales para la norma del vector de residuos. En función de las propiedades que cumplen los residuos de las subclases (2) y (14) de las funciones complejas de la clase (1) con las condiciones (I) y (II) se propone el siguiente resultado:

El vector $\mathbf{c}_{-1} = (c_{-1}^1, c_{-1}^2, \dots, c_{-1}^n)$, donde c_{-1}^j para $j = 1, \dots, n$ son los residuos en los polos z_j , de la función $f(z)$ definida en (1) con las condiciones (I) y (II), satisface las siguientes desigualdades:

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty > \frac{1}{n}.$$

Material y Métodos

Como se ha señalado previamente, el estudio está centrado en las propiedades que cumplen las normas del vector cuyos elementos son los residuos de las funciones complejas que satisfacen la definición (1) con las condiciones (I) y (II). Se probará la hipótesis planteada utilizando el método inductivo en matemática, según el cual si una función proposicional es verdadera para $n = 1$ y de la verdad para $h \in \mathbb{N}$ se deduce

la verdad para $h + 1$, entonces se concluye la verdad para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para las aplicaciones se emplea la metodología de modelización ARIMA^{viii}. Concretamente, se estudia los datos que conforman las series de registros históricos del Índice de Precios al Consumidor y del precio en Pesos Argentinos del Dólar. Éstos son tomados de la página oficial del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) de la República Argentina, www.indec.gov.ar. También se ejemplifica con datos de generación eléctrica bruta (en MWh) que se tomaron de la página oficial de la Represa Hidroeléctrica de Salto Grande, www.saltogrande.org y corresponden a registros diarios.

Resultados:

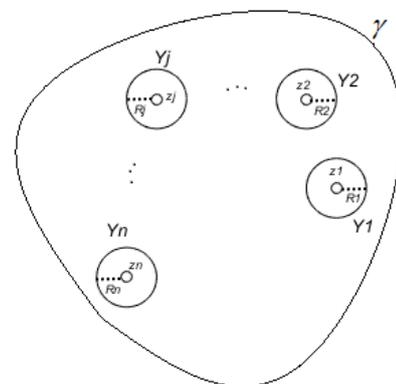
Sea $f(z)$ definida en (1) con las condiciones (I) y (II).

Supóngase que Ω es un dominio simplemente conexo^{ix} y que γ es un contorno cerrado simple en Ω que encierra a los polos de $f(z)$ y al círculo unidad. Si f es analítica en Ω excepto en los ceros de $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_n z^n$, entonces

$$\|c_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (25)$$

donde $c_{-1} = (c_{-1}^1, c_{-1}^2, \dots, c_{-1}^n)$ y c_{-1}^j para $j = 1, \dots, n$ son los residuos de $f(z)$ en los polos z_j .

En efecto, supóngase que γ es un contorno cerrado simple que encierra dentro de sí al círculo de radio uno y a las circunferencias $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ las cuales tienen centro en los polos simples z_1, z_2, \dots, z_n de $f(z)$, respectivamente y tal que cada γ_j para $j = 1, \dots, n$, tiene un radio R_j suficientemente



pequeño como para garantizar que las circunferencias $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ son mutuamente disjuntas. La integral de $f(z)$ sobre cada γ_j está dada por:

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_j} \frac{dz}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_n z^n} = \int_{\gamma_j} \frac{dz}{-\alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_j) \dots (z - z_n)}$$

Reescribiendo el integrando, por la fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_j} \frac{1}{-\alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)} dz = \int_{\gamma_j} \frac{g_j(z)}{z - z_j} dz = 2\pi i g_j(z_j)$$

donde $g_j(z) = \frac{1}{-\alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)}$ y tal que z interior a γ_j , pertenece a una región donde no hay singularidades de $g_j(z)$. Por otro lado, sea $\overline{p_l q_k}$ un segmento que une dos puntos p_l y q_k , con $l \neq k$, que están sobre γ_j . Sea $\delta = \max\{|\overline{p_l q_k}|\}$. Entonces^x,

$$|g_j(z)| = \left| \frac{1}{-\alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)} \right| = \frac{1}{|\alpha_n| \cdot |z - z_1| \dots |z - z_n|} > \frac{1}{|\alpha_n| \cdot \delta \dots \delta} = \frac{1}{|\alpha_n| \cdot \delta^{n-1}}$$

Puesto que^{xi} $|\alpha_n| < 1$, resulta:

$$|g_j(z)| > \frac{|\alpha_n|^n}{|\alpha_n| \cdot \delta^{n-1}} = \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta} \right)^{n-1}$$

La desigualdad anterior es verdadera para cualquier z en el dominio de g_j , en particular para z_j . Por lo tanto,

$$|g_j(z_j)| > \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta} \right)^{n-1} \quad (26)$$

Elevando a un exponente $p \in \mathbb{N}$:

$$|g_j(z_j)|^p > \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta} \right)^{p(n-1)}$$

Sumando ambos lados para $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n |g_j(z_j)|^p > n \cdot \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta} \right)^{p(n-1)}$$

Tomando raíz de índice p :

Sobre los vectores de residuos de una clase racional de funciones complejas. Aplicación a los procesos autorregresivos: ejemplos en series econométricas y en medidas de generación eléctrica.

Guillermo Daniel Scheidreiter y Omar Roberto Faure

$$\sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |g_j(z_j)|^p} > \sqrt[p]{n} \cdot \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta}\right)^{n-1}$$

Claramente, la expresión del lado izquierdo es la norma- p del vector cuyas componentes son los valores $g_j(z_j)$ para $j = 1, \dots, n$. Como

$$g_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) = c_{-1}^j$$

Se trata de la norma- p del vector de residuos:

$$\mathbf{c}_{-1} = (c_{-1}^1, c_{-1}^2, \dots, c_{-1}^n)$$

Además, $\max_n \left\{ \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta}\right)^{n-1} \right\} = 1$ y se alcanza para $n = 1$. En efecto, la sucesión

$(x_n) = \left\{ \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta}\right)^{n-1} \right\}$ es acotada, pues $|x_n| \leq \left|\frac{1}{\delta^{n-1}}\right|$ porque $|\alpha_n| < 1$. En adición,

$\delta \geq 2$, por lo que $|x_n| \leq \left|\frac{1}{2^{n-1}}\right|$. Puesto que $\max_n \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\} = 1$ y los términos de

(x_n) están acotados por los términos de $\left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$, se

obtiene $\max_n \left\{ \left(\frac{|\alpha_n|}{\delta}\right)^{n-1} \right\} = 1$. Entonces, para $n = 1$:

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_p > 1. \quad (27)$$

Que es (25) con $n = 1$. Se probará ahora la siguiente proposición:

$$\text{Si } \|\mathbf{c}_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{p-1}{p}}, \text{ entonces } \|\mathbf{c}_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Supóngase que $\|\mathbf{c}_{-1}\|_p \leq \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}$, donde $\mathbf{c}_{-1} = (c_{-1}^1, c_{-1}^2, \dots, c_{-1}^{h+1})$. Entonces,

$$\sqrt[p]{\sum_{j=1}^{h+1} |c_{-1}^j|^p} \leq \sqrt[p]{\left(\frac{1}{h+1}\right)^{p-1}}$$

de donde resulta:

$$\sum_{j=1}^{h+1} |c_{-1}^j|^p \leq (h+1) \cdot \frac{1}{(h+1)^p}.$$

El resultado anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^h |c_{-1}^j|^p + |c_{-1}^{h+1}|^p \leq (h+1) \cdot \frac{1}{(h+1)^p}$$

Es inmediato, por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^h |c_{-1}^j|^p \leq (h+1) \cdot \frac{1}{(h+1)^p}$$

Aplicando raíz de índice p en ambos miembros:

$$\sqrt[p]{\sum_{j=1}^h |c_{-1}^j|^p} \leq \frac{\sqrt[p]{h+1}}{h+1} = \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Pero este último resultado contradice la hipótesis y surgió de suponer la negación de la tesis. Luego,

$$\|c_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (28)$$

De (27), $\|c_{-1}\|_p > 1$. De (28), si $\|c_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{p-1}{p}}$, entonces $\|c_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Por el principio de inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\|c_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Son casos particulares:

$$\|c_{-1}\|_1 > 1 \text{ y } \|c_{-1}\| > \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (29)$$

Además, $\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right] = \frac{1}{n}$. Puesto que

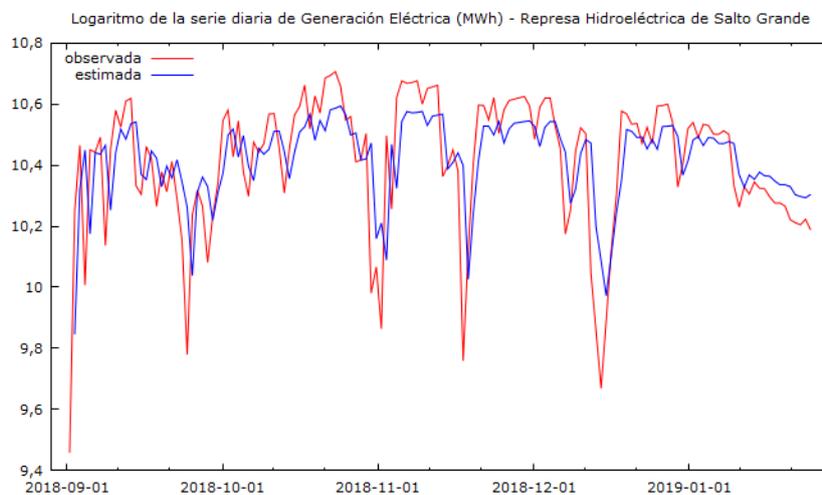
$$\|c_{-1}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|c_{-1}\|_p:$$

$$\|c_{-1}\|_\infty > \frac{1}{n}. \quad (30)$$

Discusión:

Las funciones complejas de la forma (1) aparecen en series de tiempo cuando éstas se modelan mediante procesos autorregresivos. Un ejemplo puntual es la serie de registros diarios de generación eléctrica (MWh) de la Represa Hidroeléctrica de Salto Grande, en el período registrado desde septiembre de 2018 a enero de 2019. Se representó el logaritmo de los datos observados y la estimación del modelo. De la información arrojada por el correlograma de las funciones de autocorrelación simple y parcial, los criterios de información de Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn y los tests basados en los residuos^{xii} se obtuvo el modelo autorregresivo de orden 1, $AR(1)$:

$$y_t = 4,17636 + 0,599419y_{t-1} + A_t$$



El operador (24) resulta:

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - 0,599419z}$$

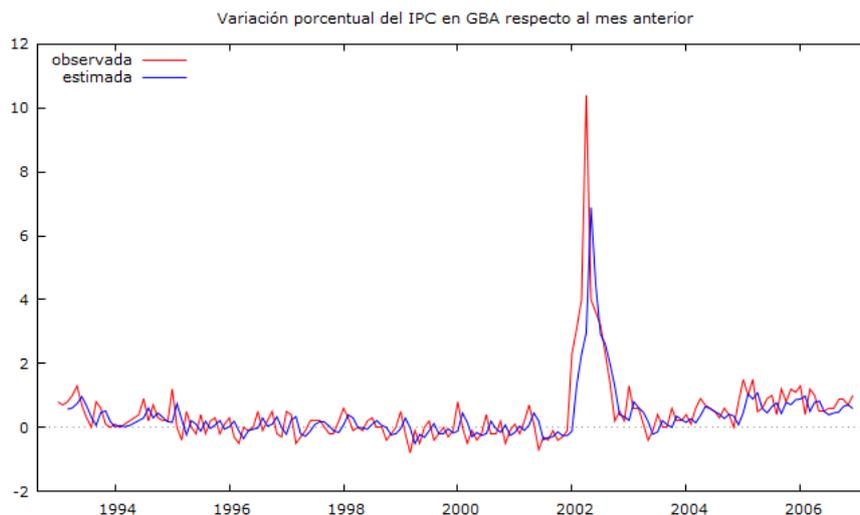
Se trata de la subclase (2) de (1), donde se satisfacen las condiciones (I) y (II). En tal caso, $\alpha_1 = 0,599419 = \phi_1$:

$$c_{-1}^1 = -\frac{1}{\alpha_1} = -\frac{1}{0,599419} = -1,66828212.$$

Claramente, el proceso autorregresivo es estacionario y se cumple (3). Otro ejemplo es la serie de tiempo correspondiente al Índice de Precios al Consumidor, IPC, en el Gran Buenos Aires. Puntualmente se toma la variación porcentual del índice respecto del mes anterior, en el período comprendido desde enero de 1993 hasta diciembre de 2006. En este caso, se estima un modelo autorregresivo de orden $s = 2$:

$$y_t = 0,584000y_{t-1} + 0,203494y_{t-2} + A_t$$

En el siguiente gráfico se representa la variable observada y la estimada por el modelo:



En este caso, el operador complejo asociado es

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - 0,584000z - 0,203494z^2}$$

La función se corresponde con la forma (14) y se verifican las condiciones

(I) y (II), pues $|0,584000| + |0,203494| < 1$ y además, $|z_1| = |-4,0756094790| > 1$ y $|z_2| = |1,2057459941| > 1$. Empleando (16):

$$c_{-1}^{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{(0,584000)^2 + 4 \cdot 0,203494}} = \pm 0,9304713208.$$

El vector de residuos es:

$$c_{-1} = (0,9304713208, -0,9304713208).$$

Las normas del vector verifican (29) y (30):

Sobre los vectores de residuos de una clase racional de funciones complejas. Aplicación a los procesos autorregresivos: ejemplos en series econométricas y en medidas de generación eléctrica.

Guillermo Daniel Scheidreiter y Omar Roberto Faure

$$\|c_{-1}\|_2 = 1,31588516 > \frac{1}{\sqrt{2}}, \|c_{-1}\|_1 = 1,86094264 > 1 \text{ y } \|c_{-1}\|_\infty = 0,93047132 > \frac{1}{2}.$$

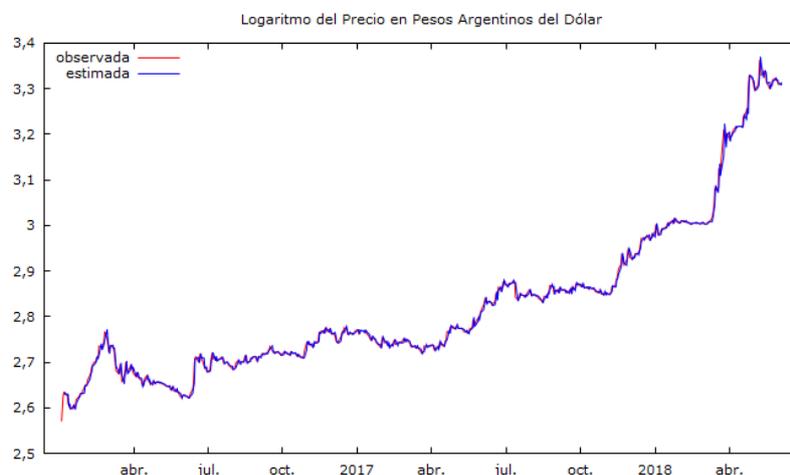
Los procesos autorregresivos también aparecen en la práctica cuando al estudiar una serie de tiempo se encuentra volatilidad en la varianza^{xiii}, que se conoce como heteroscedasticidad condicional dependiente del tiempo. El modelo para estudiar este comportamiento

$$A_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 A_{t-1}^2 + \alpha_2 A_{t-2}^2 + \dots + \alpha_s A_{t-s}^2 + \varepsilon_t \quad (31),$$

es un $AR(s)$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y recibe el nombre de *ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)*. Por ejemplo, si se considera el logaritmo de la evolución del precio del Dólar en Pesos Argentinos desde inicios de 2016 hasta julio de 2018, se obtiene un modelo $AR(2)$ con un orden de diferenciación, es decir, un modelo $ARIMA(2,1,0)$:

$$(1 - B)(1 - 0,267728B + 0,143342B^2)y_t = A_t$$

El siguiente gráfico muestra la variable observada y la estimada:



Se halló evidencia de heteroscedasticidad condicional y se modeló la misma mediante un proceso $AR(4)$. Resultó el operador complejo:

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - 0,128940z - 0,116899z^2 - 0,153156z^3 - 0,169289z^4}$$

Se trata de una función compleja de la clase (1) con $n = 4$ que verifica las condiciones (I) y (II). El vector de residuos es:

$$\mathbf{c}_{-1} = \begin{pmatrix} 0,291604006704114 - 0,300154215080589i \\ 0,291604006704114 + 0,300154215080589i \\ -0,291604006704114 - 0,241806751480026i \\ -0,291604006704114 + 0,241806751480026i \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

De (25) la norma- p satisface:

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

En particular, $\|\mathbf{c}_{-1}\|_2 = 0,798284224250679 > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,5$. Además, $\|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty = 0,418479927304211 > 0,25$.

Conclusiones:

Las primeras propiedades para los residuos de las funciones complejas (1) con las condiciones (I) y (II), muestran para la subclase (2) que los mismos se encuentran fuera de una circunferencia de radio 1, mientras que para (14) permanecen fuera de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$. Además, los resultados (25) y (30), establecen que las normas del vector de residuos de estas funciones racionales complejas tienen una cota inferior que depende del grado n del polinomio denominador y del orden p de la norma que se considere:

$$\|\mathbf{c}_{-1}\|_p > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty > \frac{1}{n}.$$

La norma-2 y la norma infinito, al combinarse con (13), muestran otro resultado a considerar:

$$\frac{1}{n} < \|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty \leq \|\mathbf{c}_{-1}\|_2 \quad \text{y también} \quad \frac{\sqrt{n}}{n} < \|\mathbf{c}_{-1}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{c}_{-1}\|_\infty.$$

Es decir, ambas normas tienen una cota superior.

Como se mostró en la discusión del apartado anterior, las funciones complejas (1) cuando se cumplen (I) y (II) tienen aplicabilidad directa sobre los procesos autorregresivos. En particular, modelan el operador complejo de un proceso estacionario en media. Aunque en la práctica, los casos más frecuentes son procesos $AR(1)$ y $AR(2)$, los resultados (25) y (30) establecen condiciones muy generales sobre estos procesos cualquiera sea su orden de autorregresividad, mostrando una alternativa para estudiar la estacionariedad de los mismos. En otras palabras, siempre que un proceso autorregresivo estacionario tenga un operador complejo que cumple las condiciones (I) y (II) de la clase racional de funciones complejas de la forma (1), se cumplirán (25) y (30).

Lo expuesto en este trabajo señala una conexión importante entre los procesos autorregresivos y cierta clase de funciones racionales complejas. Se continuará investigando relaciones que permitan conocer propiedades alternativas a las ya conocidas.

Bibliografía:

- Ahlfors, L. (2013). *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- Apostol, T. M. (2009). *Análisis Matemático*. Barcelona, España: Reverté.
- Box, G., Jenkins, G., & Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. USA: Prentice-Hall International.
- Brockwell, P., & Davis, R. (1987). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer.
- Brockwell, P., & Davis, R. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York: Springer.
- Chatfield, C. (1995). *The Analysis of Time Series, an Introduction*. Washington, D. C.: Chapman y Hall/CRC.
- Churchill, R., & Brown, J. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

- Derrick, W. (1984). *Complex Analysis and Applications*. EEUU: Wadsworth, Inc.
- Engle, R. (Julio de 1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1008.
- Faure, O. R., & Scheidreiter, G. D. (Agosto de 2017). Estudio de la Varianza de los Errores de Modelos ARIMA Asociados a Series de Precipitaciones: Modelos ARCH/GARCH. *RInCE*, 8(15).
- Faure, O., & Scheidreiter, D. (2015). Aplicación de los Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA) a las Series de Precipitaciones de Lluvia. *RInCE*, 6(12).
- Fisher, S. (2007). *Function Theory on Planar Domains*. New York: Dover Publications.
- Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*. U.S.A.: Wiley.
- Harvey, A. C. (1993). *Time Series Models*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Heins, M. (1962). *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Korevar, J., & Wiegerinck, J. (2017). *Several Complex Variables*. Recuperado el Julio de 2018, de <https://staff.science.uva.nl/j.j.o.o.wiegerinck/edu/scv/scvboek.pdf>
- Landro, A., & González, M. (2009). *Elementos de Econometría de los Fenómenos Dinámicos* (Vol. I). Buenos Aires: Ediciones Cooperativas.
- Markushevich, A. (1970). *Teoría de las Funciones Analíticas* (Vol. I y II). Moscu: MIR.
- Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1952). *Análisis Matemático* (Vols. I, II y III). Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Scheidemann, V. (2005). *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Berlin: Birkäuser Verlag.

Shumway, R., & Stoffer, D. (2011). *Time Series Analysis and its Applications*. New York: Springer.

Spivak, M. (2005). *Calculus*. Barcelona, España: Reverté.

Wei, W. W. (2006). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. U.S.A.: Pearson Addison Wesley.

Zill, D., & Shanahan, P. (2009). *Introducción al Análisis Complejo con Aplicaciones*. México: CENGAGE Learning.

Notas aclaratorias:

ⁱ Un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos frontera.

ⁱⁱ Se dice que z_0 es un *punto de acumulación* para un conjunto Δ , si cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de puntos pertenecientes a Δ . CITATION Mar70 \{ 11274 | (Markushevich, 1970)}.

ⁱⁱⁱ La *clase* de funciones analíticas está formada por las funciones complejas de una variable compleja que poseen una derivada dondequiera que se defina la función. Con igual significado se usa el término función *holomórfica* (Ahlfors, 2013).

^{iv} Si en (6) $c_{-n} \neq 0$ para algún n pero $c_{-m} = 0$ para todo $m > n$, el punto z_0 se llama polo de orden n . Un polo de orden 1 se llama usualmente *polo simple* (Apostol, 2009).

^v Para polos de orden n véase, entre otros, (Zill & Shanahan, 2009).

^{vi} \mathbb{C}^n con el producto interno (11) es un espacio complejo de Hilbert y el mapeo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(x,y) \rightarrow x + iy$ es una isometría. Así, todas las métricas y nociones topológicas en estos espacios coinciden. Todas las normas definen alguna topología en \mathbb{C}^n .

^{vii} También se conoce como norma del supremo.

^{viii} Sobre esta metodología puede consultarse la bibliografía citada.

^{ix} Un dominio *simplemente conexo* es un dominio tal que todo contorno cerrado simple dentro de él encierra sólo puntos de él. Cuando no es simplemente conexo se llamará *múltiplemente conexo* (Churchill & Brown, 1992).

^x Obsérvese que $|z_j| > 1$ para $j = 1, \dots, n$ y puesto que el círculo unidad está contenido en γ , resulta $\delta \geq 2$. Como caso particular, γ puede ser una circunferencia y δ su diámetro.

^{xi} Condición propia de la clase de funciones consideradas.

^{xii} Aquí se hace referencia a los restos (diferencias o residuos) que se obtienen de restar los valores observados y los estimados con el modelo. No son los residuos complejos.

^{xiii} Cuando se realizan predicciones con modelos ARIMA, tradicionalmente se asume que la varianza es constante en el período de predicción, aunque esta suposición no siempre es cierta (Engle, 1982).