

Fecha de recepción: 27 de septiembre de 2016  
Fecha de aceptación y versión final: 2 de diciembre de 2016

**RInCE**

**Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La  
Universidad Nacional de la Matanza**

**Artículo de investigación:**

***Proyecciones Cartográficas y Teoría de las Deformaciones***<sup>1</sup>

**Autor: Sebastián Emiliano Kuljis**<sup>2</sup>

### **Resumen**

En este trabajo se muestra la imposibilidad de construir un mapa perfecto de la superficie de la Tierra. En primer lugar, presentamos las condiciones necesarias que debe cumplir una proyección para confeccionar un mapa ideal de la superficie terrestre. Luego, se demostrará que tal proyección no existe debido a las diferencias existentes entre las curvaturas Gaussianas de la esfera, considerada como un modelo de aproximación a la superficie terrestre, y el plano, superficie en la que se dibujará el mapa deseado. En virtud de este resultado, se estudiará la teoría de las deformaciones (objeto de estudio de la cartografía matemática) con el fin de conocer la forma e intensidad de las deformaciones producidas por cada proyección. Finalmente, se muestran, a modo de ejemplos, algunas proyecciones cartográficas.

**Palabras clave:** Cartografía matemática, Proyecciones cartográficas, Curvatura Gaussiana, Teorema Egregium de Gauss.

---

<sup>1</sup> Basado en la Tesis de Licenciatura en Matemática Aplicada: "Proyecciones Cartográficas y Teoría de las Deformaciones" de Sebastián Emiliano Kuljis. Universidad Nacional de La Matanza. Julio de 2016.

<sup>2</sup> Sebastián Emiliano Kuljis, Lic. En Matemática Aplicada, Universidad Nacional de La Matanza, correo de contacto: [sekuljis@gmail.com](mailto:sekuljis@gmail.com)

## ***Cartographic projections and Deformation Theory***

### **Abstract**

The main objective of this paper is to show the impossibility of building a perfect map of the surface of the Earth. First, we present the conditions to be met by a projection to make a perfect map of the Earth's surface. Then, it demonstrates that such projection does not exist due to differences between the Gaussian curvatures of the sphere, considered a model approach to the Earth's surface and the plane surface on which the desired map will be drawn. Under this result, we are going to study the theory of deformations (object of study of mathematics mapping) in order to know the shape and intensity of the deformations produced by each projection. Finally, are shown, as examples, some map projections.

**Key words:** mathematical cartography, Cartographic projections, Gaussian curvature, Theorem Gauss Egregium

## ***Projeções cartográficas e Teoria Deformação***

### **Resumo**

Neste mostra-se a impossibilidade de construir um mapa perfeito da superfície da Terra. Em primeiro lugar, as condições neccesárias que debe cumprir uma proteção, para criar um mapa perfeito da superfície terrestre. Logo, se demonstrará que tal projeção não existe devido a diferenças existentes entre as curvaturas Gaussianas da esfera, considerada como um modelo de aproximação à superfície terrestre e o plano, superfície em que se desenhará o mapa. En virtude de este resultado se estudará a teoria das deformações (objeto de estudo da cartografia matemática), com o fim de conhecer a forma e intensidade das deformações produzidas por cada projecção. Finalmente, mostra-se, a modo de exemplos, algumas projeções.

**Palavra chave:** cartografia matemática, projeções de mapa, a curvatura Gaussian, Gauss teorema Egregio.

## **Elección del Tema**

El estudio de la cartografía matemática y la construcción de mapas es fundamental para muchos aspectos de la vida cotidiana. Entre ellos podemos destacar a los sistemas de información geográfica (SIF) y especialmente a los sistemas de posicionamiento global (GPS). Además, es importante a la hora del trazado rutas aéreas o rumbos en navegación, como así también para la comprensión de distintos fenómenos en regiones particulares. Por lo tanto, estudiar las herramientas matemáticas que describen a estas proyecciones cartográficas permiten comprender la gran variedad de ellas junto a sus usos y aplicaciones.

## **Definición del problema**

Estudiaremos el problema de construir una proyección cartográfica ideal de la superficie de la Tierra, entendiendo por ideal a una representación capaz de conservar invariantes ciertos elementos métricos.

A la hora de encontrar una representación que cumpla tales condiciones, estamos interesados en construir una proyección que mantenga elementos tales como distancias, geodésicas, ángulos, direcciones, áreas, etc.

Este problema puede resolverse estudiando la teoría de las transformaciones diferenciables entre superficies, y hallando una transformación isométrica entre la superficie del plano y la superficie de la esfera.

## **Antecedentes y Justificación del estudio**

En la actualidad, la cartografía se define como una disciplina científica que se ocupa de la representación gráfica de la Tierra o de parte de ella, o de cualquier otro cuerpo celeste, para lo cual se utilizan fundamentalmente los mapas.

La cartografía se compone de tres partes fundamentales. En primer lugar, la adquisición, análisis y tratamiento de la información geográfica que posteriormente se utilizará en la elaboración de los mapas. La segunda se conoce con el nombre de cartografía matemática y se ocupa del estudio de las proyecciones, transformaciones geométricas y matemáticas, de la superficie terrestre en un plano. La tercera y última parte de la cartografía es el diseño y publicación de los mapas.

El estudio de las proyecciones cartográficas ha sido abordado por muchos autores debido a sus múltiples aplicaciones. La construcción de mapas es fundamental para los sistemas de información geográfica (SIF) y especialmente en los sistemas de posicionamiento global (GPS). También es necesaria para la determinación de rumbos en navegación, para el estudio de las superficies de otros cuerpos celestes, para la evolución de distintos fenómenos en las regiones polares (tales como el agujero de ozono), en la confección de mapas estadísticos para estudiar la distribución de cultivos, sueldos, etc.

Sin embargo, en la mayoría de los trabajos actuales en cartografía matemática se expone una inmensidad de proyecciones cartográficas junto a sus características y usos. Pero rara vez mencionan el porqué de tantas representaciones cartográficas. Es decir, no explican detenidamente el porqué de la imposibilidad de construir un mapa perfecto de la superficie de la Tierra capaz de satisfacer todas las necesidades a la vez. En el mejor de los casos se recurre a razonamientos geométricos que comparan los ángulos interiores de un triángulo esférico y uno plano. Se muestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico siempre es mayor a la suma de los ángulos interiores de un triángulo plano. Esto permite descartar la existencia de una isometría (transformación que deje invariante los elementos métricos necesarios) entre la esfera y el plano, pero dichos argumentos no atacan directamente a la raíz del problema.

Por este motivo, emprenderemos el camino hacia el estudio de conceptos propios de la geometría diferencial tales como primeros y segundos coeficientes fundamentales, curvaturas, entre otros; que nos permitan comprender los fundamentos de la imposibilidad de construir un mapa ideal de la superficie terrestre.

### **Limitaciones y Alcances del Trabajo**

En este trabajo expondremos las razones por las cuales no es posible construir un mapa ideal de la superficie terrestre. Para arribar a este resultado adoptaremos el modelo esférico como superficie de representación de la Tierra. Debido a esta aproximación, el modelo es aplicable para regiones lo suficientemente extensas. Para obtener resultados más precisos puede utilizarse el modelo del elipsoide de revolución

como superficie de representación del planeta. Este trabajo no realiza tal desarrollo, pero puede servir como punto de partida para tal objetivo. En tal caso, el desarrollo teórico que aquí se presenta puede adaptarse, teniendo en cuenta los cuidados necesarios, al modelo del elipsoide de revolución.

## **Objetivos**

Explicar los fundamentos que descartan la posibilidad de un mapa perfecto de la superficie de la Tierra, y estudiar algunas proyecciones cartográficas destacando ventajas y aplicaciones.

## **Hipótesis**

Las curvaturas del plano y la esfera nunca son iguales y, por lo tanto, no existe una transformación isométrica entre dichas superficies. De esta forma, no existe una representación o proyección que mantenga invariante los elementos métricos necesarios para la confección de un mapa perfecto.

## **Metodología**

A continuación, se expondrán los principales conceptos que permiten arribar a los objetivos planteados.

## **Desarrollo del trabajo**

Como mencionamos al comienzo, en principio daremos las condiciones que ha de cumplir una proyección que resulte ideal para la superficie de la Tierra.

Para ello, mostraremos, de manera intuitiva, que una proyección tal, capaz de preservar las distancias entre puntos entonces conservará los caminos más cortos (geodésicas), los ángulos y las áreas. En efecto, mantendrá todos los elementos métricos necesarios invariantes. Este tipo de transformaciones son las denominadas isométricas.

En primer lugar, toda proyección de la esfera en el plano que preserve las distancias (esto es, que la distancia entre dos puntos cualquiera de la esfera sea igual a la distancia entre sus imágenes en el plano) también preservará las geodésicas.

De esta manera, mediante la proyección buscada las circunferencias máximas se transformarán en rectas en el plano. Esto se debe a que la distancia entre dos puntos P y Q de una superficie S se define como el ínfimo de las longitudes  $L(C)$  de todos los posibles arcos regulares C de S, que unan los puntos en cuestión.

En el plano,  $D(P,Q)$  (distancia entre P y Q), resulta ser la distancia euclídea y existe siempre un arco de longitud mínima, único, y es el segmento de recta entre P y Q. De esto se deduce que en el plano las geodésicas son rectas mientras que en la superficie esférica son las circunferencias máximas, es decir curvas que resultan de intersectar la esfera con planos que contienen al centro de la misma.

Probaremos esto por reducción al absurdo. Es decir, supongamos que nuestra proyección no preserve las geodésicas. Por lo tanto, existirán dos puntos A y B sobre la esfera, y un punto C sobre el camino más corto entre los anteriores (circunferencia máxima que pasa por A y B) de forma que su imagen en el plano  $C'$  no pertenecerá a la recta que une las imágenes  $A'$  y  $B'$  de los puntos A y B, respectivamente.

Así, se presenta la siguiente situación, debido a que las distancias son preservadas por esta proyección, se tendrá,

$$D(A,B) = D(A',B') \quad (1)$$

Como C pertenece a la circunferencia máxima que pasa por A y B, se puede escribir.

$$D(A,B) = D(A,C) + (C,B) \quad (2)$$

Sin embargo,  $C'$  no pertenece a la recta que une a  $A'$  y  $B'$ , entonces:

$$D(A',B') < D(A',C') + D(C',B') \quad (3)$$

Pero esta última expresión, al preservarse las distancias, es igual a  $D(A,C) + (C,B)$ .

De esto y de la expresión (1), se llega a una contradicción, puesto que

$$D(A',B') < D(A,B)$$

El absurdo viene de suponer que no se preservan los caminos más cortos. De esta forma, hemos probado que los caminos mínimos han de preservarse.

En segundo lugar, y utilizando la afirmación anterior, mostraremos que las curvas de la esfera son transformadas en curvas del plano de la misma longitud. Es decir,

veremos que el hecho de preservar las distancias equivale a que se preserve las longitudes de curvas.

Notemos que toda curva de la esfera puede ser aproximada por un número finito (suficientemente grande) de arcos de circunferencias máximas cuyos extremos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  están sobre la curva. Así, es posible aproximar su longitud mediante la suma de las longitudes de estos arcos, o, dicho de otra manera, por la suma de las distancias entre sus extremos, por ser los arcos de circunferencias máximas las geodésicas que los unen:

$$L(C) = D(P_0, P_1) + D(P_1, P_2) + \dots + D(P_{n-1}, P_n)$$

Por otro lado, la curva plana imagen de la anterior, se aproxima por los segmentos de rectas que son imágenes de los arcos de circunferencias máximas consideradas, es decir por la suma de las distancias entre los extremos de dichos segmentos  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ :

$$L(C') = D(P'_0, P'_1) + D(P'_1, P'_2) + \dots + D(P'_{n-1}, P'_n)$$

Pero, como la proyección conserva las distancias, entonces la distancia entre extremos consecutivos en la curva esférica original es igual a la distancia de sus imágenes, extremos consecutivos de los segmentos de la curva imagen:

$$D(P_i, P_{i+1}) = D(P'_i, P'_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

De esta manera, se comprueba que la longitud de una curva en la esfera es igual a la longitud de su curva plana imagen mediante la proyección.

Siguiendo con nuestro argumento, vamos a realizar una demostración intuitiva de que los ángulos también han de preservarse si se mantienen las distancias. Dadas dos circunferencias máximas de la esfera que se cortan en un punto, si consideramos una circunferencia de radio  $R$  centrada en dicho punto (lo suficientemente pequeño) entonces el ángulo  $\beta$  entre dichas curvas (que es el ángulo que forman sus vectores tangentes) puede aproximarse mediante el cociente  $\beta = L/R$  (donde  $L$  es la longitud del arco de circunferencia).

A continuación, si tomamos una aplicación que preserve las distancias, obtendremos que las circunferencias máximas se han transformado en rectas, y la circunferencia de radio  $R$  sobre la esfera se transformará en una circunferencia de radio  $R$  centrada en el punto de corte de las rectas. Luego, como la fórmula anterior es válida en el plano se deduce que el ángulo entre las circunferencias máximas se conservará.

Finalmente, concluiremos mostrando que si se preservan las distancias también se preservará las áreas. La idea de esta afirmación se basa en que, dada una región acotada en la superficie de la esfera, es posible cubrirla con una familia de regiones delimitadas por meridianos y paralelos que podemos considerar regiones rectangulares (un número lo suficientemente grande de regiones que, por tanto, serán lo bastante pequeñas) y podemos aproximar el área de dicha región mediante la suma de las áreas de esos "rectángulos". En el plano, obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y dado que la aplicación conserva las distancias, tendrá la misma área.

En conclusión, hemos mostrado que las aplicaciones de la esfera en el plano que preservan las distancias, o lo que es lo mismo, las longitudes de las curvas, también preservarán las áreas, las geodésicas y los ángulos, es decir, todas las propiedades métricas en las que estamos interesados. Como consecuencia de lo expuesto hasta el momento, podemos concluir que para cumplir nuestro objetivo de hallar un mapa correcto del mundo debemos encontrar o diseñar una proyección matemática de la esfera al plano que resulte ser una isometría.

A continuación, demostraremos que tal transformación no existe, pero para ellos debemos definir algunos conceptos propios de la Geometría Diferencial.

### **Primeros Coeficientes fundamentales**

La diferencial de la función vectorial que define la superficie en un punto y para un vector  $d\vec{u} = (du, dv)$  es,

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

Lo que permite expresar la distancia entre dos puntos separados por una distancia diferencial, distancia definida por una variación infinitesimal de los parámetros,  $(du, dv)$ , según,

$$ds^2(du, dv) = \|d\vec{r}\|^2$$

$$ds^2(du, dv) = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$

$$ds^2(du, dv) = \vec{r}_u \vec{r}_u du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v \vec{r}_v dv^2$$

Si se introduce la notación  $E = \vec{r}_u \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \vec{r}_v$  se obtiene la primera forma cuadrática fundamental de la teoría de superficies,

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

A los coeficientes  $E, F$  y  $G$  se los denomina primeros coeficientes fundamentales que son funciones de  $u$  y  $v$ .

Los primeros coeficientes fundamentales juegan un papel fundamental en el cálculo de longitudes de arcos, ángulos y áreas de superficies. En efecto, estos pueden calcularse dependiendo de estos coeficientes según:

### Medida de distancias

Si se considera una curva sobre una superficie,  $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  y dos puntos infinitamente próximos de la misma,  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t + dt)$ , la distancia entre ello vendrá dada por:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

Para dos puntos  $t_1$  y  $t_2$ .

### Medida de ángulos

Supongamos que  $P$  sea el punto en el que se cortan dos curvas de parámetros  $t$  y  $\tau$  contenidas en la misma:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$$

$$\vec{r}(\tau) = \vec{r}(u(\tau), v(\tau))$$

Siendo los vectores tangentes a dichas curvas en el punto común:

$$\begin{aligned}\vec{r}_t &= \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \\ \vec{r}_\tau &= \vec{r}_u \frac{du}{d\tau} + \vec{r}_v \frac{dv}{d\tau}\end{aligned}$$

El ángulo que forman dos curvas sobre una superficie en un punto común vendrá dado por el ángulo que forman los vectores tangentes a dichas curvas en el punto considerado, ángulo que por tanto se mide sobre el plano tangente.

$$\cos\alpha = \frac{E \frac{du}{dt} \frac{du}{d\tau} + F \left( \frac{du}{dt} \frac{dv}{d\tau} + \frac{du}{d\tau} \frac{dv}{dt} \right) + G \frac{dv}{dt} \frac{dv}{d\tau}}{\frac{ds}{dt} \frac{ds}{d\tau}}$$

### Medida de Superficies

Sea el paralelogramo infinitesimal de lados diferenciales de curvas paramétricas,  $d\vec{r}(u) = \vec{r}_u du$  y  $d\vec{r}(v) = \vec{r}_v dv$ . Es evidente que la determinación de la superficie pasa por plantear,

$$dA^2 = \|d\vec{r}(u) \times d\vec{r}(v)\|^2 = (EG - F^2) du^2 dv^2$$

Resultando,

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv$$

### Segundos Coeficientes fundamentales

Si  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  es una carta en una superficie de clase  $\geq 2$ , entonces en cada punto de la misma existe una normal unitaria,  $\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$  que es una función de  $u$  y  $v$ , de clase  $C^1$  y que tiene la diferencial  $d\vec{N} = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv$ .

Consideremos la siguiente cantidad:

$$\begin{aligned}II &= -d\vec{r}d\vec{N} = -(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{N}_u du + \vec{N}_v dv) \\ &= -\vec{r}_u \vec{N}_u du^2 - (\vec{r}_u \vec{N}_v + \vec{r}_v \vec{N}_u) dudv - \vec{r}_v \vec{N}_v dv^2 = L du^2 + 2M dudv + N dv^2\end{aligned}$$

En donde,

$$L = -\vec{r}_u \vec{N}_u, \quad M = -\frac{1}{2}(\vec{r}_u \vec{N}_v + \vec{r}_v \vec{N}_u), \quad N = -\vec{r}_v \vec{N}_v$$

La función  $II$  recibe el nombre de segunda forma fundamental de  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Los coeficientes  $L, M, N$  se denominan segundos coeficientes fundamentales.

Se puede demostrar que (aquí no lo haremos y puede consultarse en la bibliografía) los segundos coeficientes fundamentales pueden calcularse también a partir de las siguientes expresiones:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} \quad \text{y} \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}$$

### Curvatura Gaussiana

Se define curvatura normal en un punto de una superficie y para una dirección como la relación entre la segunda y primera formas fundamentales,

$$k_n = \frac{II}{I}$$

Se denominan direcciones principales en cada punto  $P$  de una superficie  $S$ , a aquellas para las que la curvatura normal,  $k_n$ , alcanza los valores máximo o mínimo y sus respectivas curvaturas se denotan por  $k_1$  y  $k_2$ .

El producto de las curvaturas principales se denomina curvatura gaussiana y se denota por,

$$K = k_1 k_2$$

Se puede demostrar que la Curvatura Gaussiana puede calcularse a partir de los primeros y segundos coeficientes fundamentales según la siguiente expresión:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

A partir de las ecuaciones fundamentales de la teoría de superficies se deduce que la curvatura gaussiana, en contra de lo que dice su definición, puede calcularse solo a partir de los primeros coeficientes fundamentales. Esto es lo que se conoce como Teorema Egregium de Gauss.

### Teorema Egregium de Gauss

La curvatura gaussiana de una superficie de clase mayor o igual a 3 se expresa sólo en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas.

## Geometría Intrínseca

Un aspecto importante de la geometría lo constituye el estudio de las propiedades de una superficie que se conservan invariantes bajo ciertas aplicaciones, es decir, bajo ciertas transformaciones a las que se ve sometida.

A continuación, daremos la definición formal de isometría y demostraremos un importante teorema en lo que sigue.

Se dice que una aplicación inyectiva  $f$  de una superficie  $S$  sobre una superficie  $S^*$  es una aplicación isométrica o una isometría, si la longitud de un arco regular  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , arbitrario, de  $S$ , es igual a la longitud de su imagen  $\vec{r}^* = \vec{r}^*(t) = f(\vec{r}(t))$  en  $S^*$ .

## Teorema

Una aplicación inyectiva y sobreyectiva  $f$  de  $S$  sobre  $S^*$  es una isometría si y sólo si en toda carta  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  de  $S$  los primeros coeficientes fundamentales son respectivamente iguales, es decir, si

$$E = E^*, F = F^*, G = G^*$$

Siendo  $E^*, F^*$  y  $G^*$  los primeros coeficientes fundamentales en la imagen  $\vec{r}^* = f(\vec{r}(u, v))$  de la carta.

### Demostración

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\vec{r}(t)$   $a \leq t \leq b$  un arco regular cualquiera  $C$  en  $S$ . Puede ocurrir que  $C$  no se halle totalmente en ninguna carta de  $S$ . Sin embargo, como  $C$  es compacto estará formado por un número finito de arcos  $C_i$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  consecutivos y tales que  $C_i$  estén en alguna carta  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(u, v)$ . Luego la longitud de arco en una carta viene dada por:

$$L(C) = \sum L(C_i) = \sum \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E_i \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F_i \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G_i \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \right]$$

Pero, por hipótesis, es para todo  $i$   $E_i = E_i^*$ ,  $F_i = F_i^*$ ,  $G_i = G_i^*$ . Por lo tanto,

$$L(C) = \sum \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E_i^* \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F_i^* \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G_i^* \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \right] = \sum L(C_i) = L(C^*)$$

De este modo, la longitud de un arco cualquiera  $C$  de  $S$  es igual a la longitud de su imagen  $C^*$  de  $S^*$ , y de esta manera,  $f$  es una isometría.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $(u, v)$  un punto arbitrario perteneciente al dominio de  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Por otra parte, sean  $u(t)$  y  $v(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  un arco arbitrario que pase por el punto y  $C_\tau, C_\tau^*$  sus respectivas imágenes en el intervalo  $a \leq t \leq \tau$ . Como  $f$  es una isometría se tiene

$$L(C_\tau) = \int_a^\tau \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt = L(C_\tau^*) = \int_a^\tau \sqrt{E^* \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F^* \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G^* \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

Pero lo anterior vale para todo  $\tau$ . Por lo tanto, para todo valor de  $t$  y, en particular, en el punto  $(u, v)$ , se tiene

$$E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = E^* \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F^* \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G^* \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Pero, como hemos supuesto que la curva  $u = u(t), v = v(t)$  que pasa por el punto es arbitraria, la ecuación anterior vale en  $(u, v)$  para  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ . De aquí se concluye que  $E = E^*, F = F^*, G = G^*$  para cada  $(u, v)$ .

De esta manera, hemos probado que las isometrías mantienen los primeros coeficientes fundamentales y, en particular, todos aquellos elementos que dependan de los mismos. Al conjunto de todas las propiedades que se mantienen invariantes bajo isometrías se lo conoce como geometría intrínseca.

De lo anterior y del Teorema Egregium de Gauss se deduce que la curvatura Gaussiana es una propiedad intrínseca, de manera que, en puntos correspondientes de dos superficies isométricas, las curvaturas gaussianas son iguales.

Así, a partir del contra recíproco, se tiene que si dos superficies tienen curvaturas gaussianas distintas dichas superficies no son isométricas. Por lo tanto, la solución a nuestro problema cartográfico puede verse como un resultado particular del Teorema Egregium de Gauss. De esta manera, para demostrar que no existe una isometría entre el plano y la esfera mostraremos que sus curvaturas gaussianas nunca coinciden. Por este motivo, se termina con la idea de una proyección ideal de la superficie terrestre.

## Resultados

### Curvatura Gaussiana del Plano y de la Esfera

La ecuación del plano que pasa por un punto  $P$  y paralelo a dos vectores linealmente independientes  $w_1$  y  $w_2$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{r}(u, v) = uw_1 + vw_2 + P$$

Resulta entonces,

$$L = 0, M = 0, N = 0 \rightarrow LN - M^2 = 0 \rightarrow \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \rightarrow K = 0$$

Para la esfera parametrizada por  $\vec{r}(u, v) = (r \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \cos(v))$  se tiene,

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (-r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0) \\ \vec{r}_v &= (r \cos(v) \cos(u), r \cos(v) \operatorname{sen}(u), -r \operatorname{sen}(v)) \end{aligned}$$

De la definición de la primera forma cuadrática fundamental, se extraen las expresiones que permiten calcular los primeros coeficientes fundamentales

$$E = \vec{r}_u \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \vec{r}_v$$

Procedemos a calcular los mismos:

$$E = (-r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0) \cdot (-r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0)$$

$$E = r^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}^2(u) + r^2 \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(u) \rightarrow E = r^2 \operatorname{sen}^2(v)$$

$$F = (-r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0) \cdot (r \cos(v) \cos(u), r \cos(v) \operatorname{sen}(u), -r \operatorname{sen}(v))$$

$$F = -r^2 \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u) \cos(v) \cos(u) + r^2 \operatorname{sen}(v) \cos(u) \cos(v) \operatorname{sen}(u) \rightarrow F = 0$$

$$G = (r \cos(v) \cos(u), r \cos(v) \operatorname{sen}(u), -r \operatorname{sen}(v))$$

$$\cdot (r \cos(v) \cos(u), r \cos(v) \operatorname{sen}(u), -r \operatorname{sen}(v))$$

$$G = r^2 \cos^2(v) \cos^2(u) + r^2 \cos^2(v) \operatorname{sen}^2(u) + r^2 \operatorname{sen}^2(v)$$

$$G = r^2 \cos^2(v) + r^2 \operatorname{sen}^2(v) \rightarrow G = r^2$$

Luego, calculamos el vector normal unitario según,

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-r^2 \operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -r^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), r^2 \operatorname{sen}(v) \cos(v))$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = (-r^2 \operatorname{sen}^2(v) \cos(u))^2 + (-r^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u))^2 + (r^2 \operatorname{sen}(v) \cos(v))^2$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = r^4 \operatorname{sen}^4(v) \cos^2(u) + r^4 \operatorname{sen}^4(v) \operatorname{sen}^2(u) + r^4 \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = r^4 \operatorname{sen}^4(v) + r^4 \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = r^4 \operatorname{sen}^2(v) (\operatorname{sen}^2(v) + \cos^2(v))$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = r^4 \operatorname{sen}^2(v) \rightarrow \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = r^2 |\operatorname{sen}(v)|$$

Pero, como  $0 < v < \pi$  resulta  $\operatorname{sen}(v) > 0$ . Por lo tanto, se obtiene,

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = r^2 \operatorname{sen}(v)$$

De esta manera, estamos en condiciones de calcular el vector normal unitario

$$\vec{N} = \frac{(-r^2 \operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -r^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), r^2 \operatorname{sen}(v) \cos(v))}{r^2 \operatorname{sen}(v)}$$

$$\vec{N} = (-\operatorname{sen}(v) \cos(u), -\operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), \cos(v))$$

Ahora, debemos calcular los segundos coeficientes fundamentales. Nuevamente utilizaremos las expresiones

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} \quad \text{y} \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}$$

Previo, calcularemos las derivadas segundas necesarias:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu} &= (-r\text{sen}(v)\cos(u), -r\text{sen}(v)\text{sen}(u); 0) \\ \vec{r}_{uv} &= (-r\cos(v)\text{sen}(u), r\cos(v)\cos(u), 0) \\ \vec{r}_{vv} &= (-r\text{sen}(v)\cos(u), -r\text{sen}(v)\text{sen}(u), -r\cos(v))\end{aligned}$$

Luego, los segundos coeficientes fundamentales resultan,

$$\begin{aligned}L &= (-r\text{sen}(v)\cos(u), -r\text{sen}(v)\text{sen}(u); 0) \\ &\quad \cdot (-\text{sen}(v)\cos(u), -\text{sen}(v)\text{sen}(u), -\cos(v)) \\ L &= r\text{sen}^2(v)\cos^2(u) + r\text{sen}^2(v)\text{sen}^2(u) \rightarrow L = r\text{sen}^2(v) \\ M &= (-r\cos(v)\text{sen}(u), r\cos(v)\cos(u), 0) \cdot (-\text{sen}(v)\cos(u), -\text{sen}(v)\text{sen}(u), -\cos(v)) \\ M &= r\cos(v)\text{sen}(u)\text{sen}(v)\cos(u) - r\cos(v)\cos(u)\text{sen}(v)\text{sen}(u) \rightarrow M = 0 \\ N &= (-r\text{sen}(v)\cos(u), -r\text{sen}(v)\text{sen}(u), -r\cos(v)) \cdot (-\text{sen}(v)\cos(u), -\text{sen}(v)\text{sen}(u), -\cos(v)) \\ N &= r\text{sen}^2(v)\cos^2(u) + r\text{sen}^2(v)\text{sen}^2(u) + r\cos^2(v) \\ N &= r\text{sen}^2(v) + r\cos^2(v) \rightarrow N = r\end{aligned}$$

Finalmente, la curvatura gaussiana para una esfera de radio  $r$  resulta:

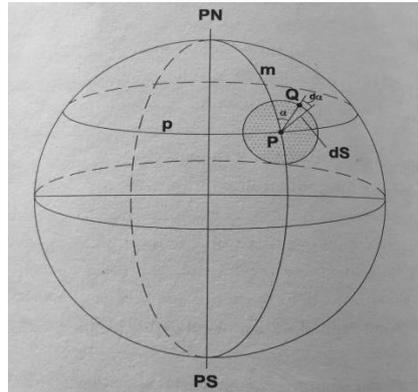
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r\text{sen}^2(v)r}{r^2\text{sen}^2(v)r^2} = \frac{r^2\text{sen}^2(v)}{r^4\text{sen}^2(v)} = \frac{1}{r^2} \neq 0 \forall r$$

En consecuencia, las curvaturas gaussianas son distintas, y por todo lo expuesto anteriormente, la esfera y el plano no son superficies isométricas.

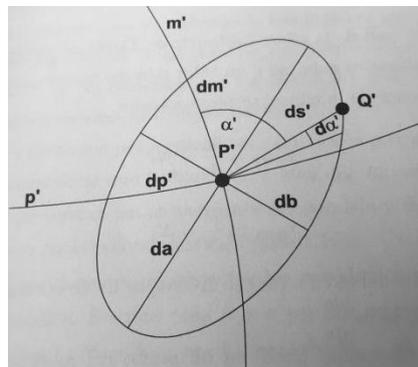
### Teoría de las Deformaciones

En virtud de lo desarrollado, hemos comprobado que la superficie terrestre (considerada como una esfera) no es desarrollable sobre un plano debido a sus diferencias en las curvaturas gaussianas. Por lo tanto, las deformaciones son inevitables en toda proyección cartográfica y de esta manera es necesario conocer qué deformaciones se producen en distintos mapas o cartas, así como también la intensidad de las mismas, su ubicación, etc.

Consideremos la esfera terrestre y tomemos un punto  $P$  por el cual pasan sus correspondientes meridiano y paralelo, y sea dicho punto el centro de un círculo infinitesimal que al ser muy pequeño podemos considerarlo plano. Al tomar un punto  $Q$  sobre la circunferencia, queda determinado el radio  $PQ = ds$ .



En la proyección se tendrá que  $Q$  se proyectará según  $Q'$  y  $ds$  según  $ds'$ . Los puntos correspondientes, a raíz de las deformaciones, no guardarán las mismas relaciones y estarán ubicados en una elipse, salvo en las proyecciones conformes (aquellas que mantienen los ángulos), en que el círculo se proyectará en otro de mayor o menor tamaño. Así  $ds'$  será un semidiámetro de la elipse, siendo variables su longitud y dirección. Los semiejes principales de la elipse se llamarán  $da$  y  $db$ .



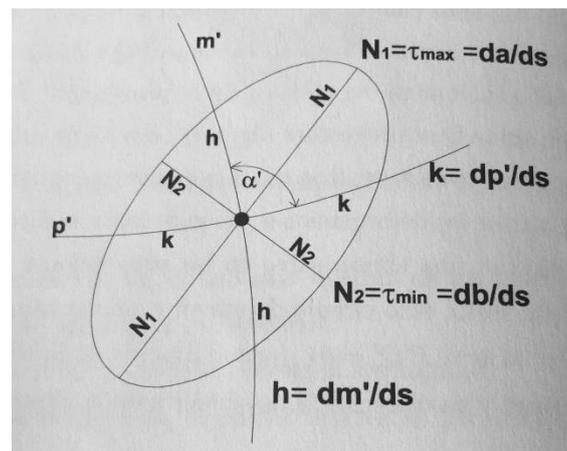
### Deformación Lineal

Se denomina módulo de alteración lineal en un punto de una proyección al cociente entre la medida o distancia en la proyección y su correspondiente en la esfera. Se simboliza  $\tau = \frac{ds'}{ds}$  siendo  $ds'$  la distancia en la proyección y  $ds$  la distancia en la esfera.

### Elipse indicatriz de Tissot

Si se dibuja una elipse cuyos semidiámetros sean  $\tau = \frac{ds'}{ds}$  será de tamaño finito. Esto permite definir la Elipse indicatriz de Tissot, la cual tiene como semidiámetros principales a los valores máximo y mínimo del módulo de la alteración lineal. Es decir,

$$\tau_{max} = \frac{da}{ds} = N_1 \text{ y } \tau_{min} = \frac{db}{ds} = N_2$$



El valor de  $\tau = \frac{ds'}{ds}$  puede ser mayor, igual o menor a 1, según la proyección y también, en la misma proyección, según la ubicación del punto  $P$  y además según la dirección de  $\tau$  para un mismo punto  $P$ . Es decir,  $\tau = f(\varphi, \lambda, \alpha)$ .

Por otro lado, al representar una superficie cualquiera  $S$  sobre otra (imagen)  $S'$  se establece entre ellas una correspondencia tal que a un punto de una corresponde un punto único y determinado en la otra. La primera superficie en nuestro caso será la esfera y la segunda un plano, salvo que se utilice una superficie auxiliar como un cilindro o un cono que luego se desenrollará sobre el plano, en el cual se adoptará un sistema de ejes ortogonales, siendo generalmente el eje de las ordenadas ( $Y$ ) el que contiene a la proyección del meridiano central de la región a representar.

Las relaciones analíticas que determinan la correspondencia entre puntos de ambas superficies se denominan ecuaciones de representación. Las mismas estarán dadas por expresiones del tipo:

$$X = f_1(\varphi, \lambda) \text{ o bien } X = X(\varphi, \lambda)$$

$$Y = f_2(\varphi, \lambda) \text{ o bien } Y = Y(\varphi, \lambda)$$

En donde  $X$  e  $Y$  son las coordenadas de los puntos de  $S'$  en el sistema ortogonal adoptado.

A continuación, se darán expresiones para calcular las alteraciones lineales, superficiales y angulares. Se puede demostrar que el módulo de alteración lineal depende de los primeros coeficientes fundamentales para la parametrización de la esfera dada en coordenadas geográficas, y que a partir de las deformaciones máximas y mínimas, se pueden obtener los valores de los semiejes principales de la Elipse de Tissot sobre los cuales es posible determinar la alteración superficial y angular.

### La esfera en Coordenadas geográficas

La parametrización de la esfera en coordenadas geográficas es:

$$\vec{r}(\varphi, \lambda) = (R \cos \varphi \cos \lambda, R \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda, R \operatorname{sen} \varphi)$$

Donde  $\vec{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  midiendo a la latitud  $\varphi$  en el sistema sexagesimal, de  $0^\circ$  a  $\pm 90^\circ$  y la longitud  $\lambda$  de  $0^\circ$  a  $\pm 180^\circ$ , siendo positivo al este y negativo al oeste.

### Módulo de alteración lineal:

El módulo de alteración lineal puede calcularse a partir de:

$$\tau^2 = \frac{E' \cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{2F' \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{R^2 \cos \varphi} + \frac{G' \operatorname{sen}^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi}$$

A partir de la expresión anterior es posible determinar rápidamente algunos valores particulares de  $\tau$ . Por ejemplo, para curvas geodésicas contenidas en el meridiano ( $\alpha = 0^\circ$ ) quedará:

$$\tau^2 = \frac{E'}{R^2} \rightarrow \tau = \frac{\sqrt{E'}}{R}$$

De la misma manera, las curvas geodésicas contenidas en un paralelo, es decir definidas por dos puntos de un mismo paralelo ( $\alpha = 90^\circ$ ), se deformarán según:

$$\tau^2 = \frac{G'}{R^2 \cos^2 \varphi} \rightarrow \tau = \frac{\sqrt{G'}}{R \cos \varphi}$$

Cuando la alteración lineal es sobre un meridiano se denota  $\tau = h$ , mientras que cuando es sobre un paralelo se escribe  $\tau = k$ . Por lo tanto, será  $h = \frac{\sqrt{E'}}{R}$  y  $k = \frac{\sqrt{G'}}{R \cos \varphi}$

De la ecuación anterior es posible hallar los valores de deformación máxima y mínima que corresponden a los ejes  $N_1$  y  $N_2$  de la elipse de Tissot.

### Módulo de alteración superficial:

Se llama módulo de alteración superficial o areal a la relación entre las áreas diferenciales en la proyección y en la esfera. Se simboliza  $\mu = \frac{dA'}{dA}$  siendo  $dA'$  el área en la proyección y  $dA$  el área en la esfera (de la misma zona). El módulo de alteración superficial se puede calcular como el producto de  $\tau_{max}$  y  $\tau_{min}$ .

Así, en el caso de las proyecciones equivalentes, la condición es que  $\mu = N_1 N_2 = 1$

Si las proyecciones de un paralelo y un meridiano se cortan en un ángulo recto en un punto,  $N_1$  y  $N_2$  coinciden con los módulos  $k$  y  $h$ , entonces, si la proyección es equivalente (conserva áreas), se cumple que  $hk = 1$ .

### Módulo de alteración angular:

Es el cociente entre el incremento de un ángulo medido en la proyección y el respectivo incremento medido en la esfera:  $\delta = \frac{d\alpha'}{d\alpha}$  pudiendo ser este cociente mayor, igual o menor a 1.

Puede demostrarse que la deformación máxima depende de los semiejes de la elipse de Tissot. En concreto, se prueba que:

$$\delta_{max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

A partir de este resultado se observa que si la proyección es conforme,

$$2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 0^\circ \rightarrow N_1 = N_2$$

De esta manera, la elipse indicatriz de Tissot se convierte en un círculo más grande, más pequeño o igual que el correspondiente en la esfera.

## Ejemplos de Proyecciones Cartográficas

Finalmente, se presentarán algunas proyecciones cartográficas y se analizarán las características y usos de cada una de ellas.

### Proyección Acimutal Ortográfica Polar

Las coordenadas de esta proyección son  $X = R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda$ ,  $Y = R \cos \varphi \cos \Delta \lambda$ , donde  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$  y  $\lambda_0$  es la longitud del meridiano central.

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas con el centro de la proyección, que se van acercando entre sí a medida que se avanza del Polo al Ecuador y según sus magnitudes reales. Es decir que el módulo de alteración lineal en la dirección de los paralelos es 1. En virtud,

$$\vec{r}(\varphi, \lambda) = (R \cos \varphi \cos \Delta \lambda, R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda) \text{ y } G' = \vec{r}_\lambda \vec{r}_\lambda$$

$$G' = \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda}; \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda}; \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) = \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$\rightarrow G' = R^2 \cos^2 \varphi$$

De esta manera, se obtiene:

$$k = \frac{\sqrt{G'}}{R \cos \varphi} = \frac{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi}}{R \cos \varphi} = 1$$

Por otro lado, los meridianos se proyectan según rectas radiales concurrentes en el centro de la proyección, formando entre sí ángulos rectos. La medida de los meridianos se ve alterada de manera que resultan ser menores que las reales. Esta deformación puede calcularse a partir de:

$$\vec{r}(\varphi, \lambda) = (R \cos \varphi \cos \Delta \lambda, R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda) \text{ y } E' = \vec{r}_\varphi \vec{r}_\varphi$$

$$E' = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi}; \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi}; \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\rightarrow E' = R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Luego, queda:

$$h = \frac{\sqrt{E'}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{R} = \operatorname{sen} \varphi$$

Como decíamos anteriormente, las proyecciones de meridianos y paralelos forman ángulos rectos, entonces se verifica que  $N_1 = k = 1$  y que  $N_2 = h < 1$ . Por lo tanto, la proyección no es conforme ya que  $h \neq k$ , ni tampoco equivalente debido a que  $hk \neq 1$ .

En función de las características expuestas esta proyección es utilizada para cartografía política o temática de las regiones polares. Por ejemplo, en Argentina, se la emplea para la representación del sector antártico.

### Proyección Cilíndrica Normal Tangente Equivalente

Las coordenadas cartesianas de la proyección son:  $X = R\Delta\lambda, Y = R\text{sen}\varphi$  siendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  (medido en radianes) y  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central.

El Ecuador se proyecta en una recta de longitud correcta y los demás paralelos según rectas paralelas al Ecuador que se van acercando cada vez más entre sí a medida que nos acercamos a los polos. Las medidas de los paralelos pueden calcularse a partir del módulo de alteración lineal:

$$k = \frac{\sqrt{G'}}{R\cos\varphi} = \frac{R}{R\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \text{sec}\varphi = N_1$$

De modo que las longitudes de los paralelos aumentan.

Por otro lado, los meridianos se transforman en rectas paralelas equiespaciadas, perpendiculares al Ecuador, de longitudes incorrectas pero menores a las reales. En efecto, si se calcula el módulo de alteración lineal en la dirección de los meridianos resulta:

$$h = \frac{\sqrt{E'}}{R} = \frac{\sqrt{R^2\cos^2\varphi}}{R} = \frac{R\cos\varphi}{R} = \cos\varphi = N_2$$

A partir de esto podemos notar que se trata de una proyección equivalente pues  $hk = 1$  pero no conforme ya que  $h \neq k$ . Además, podemos observar también que  $h < k$ , es decir que  $N_1$  es el semieje mayor de la Elipse de Tissot.

La deformación angular máxima en cada punto de la proyección puede obtenerse a partir de:

$$\delta_{max} = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2\text{arcsen} \frac{1 - \cos^2\varphi}{1 + \cos^2\varphi}$$

En función de su propiedad por mantener las áreas, esta proyección es muy usada para mapas de tema estadísticos (distribución de cultivos, sueldos, etc.) sobre todo para zonas ecuatoriales en donde no se presenta mucha deformación.

### Proyección Cilíndrica Normal Tangente Conforme de Mercator

Las coordenadas cartesianas vienen dadas por  $X = R\Delta\lambda, Y = R \ln \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  (medido en radianes) y  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central.

El Ecuador se transforma en una recta de longitud correcta, mientras que los demás paralelos se proyectan mediante rectas de mayor longitud que las reales. Esto puede determinarse calculando el módulo de alteración lineal  $k$ :

$$k = \frac{\sqrt{G'}}{R \cos \varphi} = \frac{R}{R \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

Los meridianos se proyectan en rectas paralelas equiespaciadas de longitudes infinitas. Su deformación en cada punto viene dada por el módulo de alteración lineal  $h$ :

$$h = \frac{\sqrt{E'}}{R} = \frac{\frac{R}{2 \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}}{R}$$

$$h = \frac{1}{2 \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left[2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\right]} = \frac{1}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$h = \sec \varphi$$

Se verifica así que la proyección es conforme ya que  $h = k = N_1 = N_2$  y la Elipse de Tissot resulta ser una circunferencia. También se observa que no es una representación equivalente ya que  $hk = \sec^2 \varphi \neq 1$ .

Una propiedad interesante de esta proyección es que, al ser isógona, las líneas loxodrómicas (aquellas líneas entre dos puntos de la superficie terrestre que partiendo de uno hacia el otro intersectan a los meridianos siempre con el mismo ángulo) se transforman en rectas. Por esta razón, se utiliza para mapas de navegación y, en general, en la confección de planisferios. Hasta el siglo XIX la mayor parte de los planisferios se dibujaban a partir de la proyección de Mercator.

---

## Discusiones y Conclusiones

En función a nuestro primer propósito, hemos descartado la existencia del mapa perfecto a partir de las diferencias entre las curvaturas Gaussianas de la esfera y el plano. Cabe destacar que este trabajo, a diferencia de otros que han sido consultados, se ha ocupado de explicar el porqué de esta imposibilidad desarrollando los conceptos propios de la geometría diferencial necesarios para arribar al Teorema Egregium de Gauss, y mostrando así que la solución de nuestro problema puede verse como un caso particular de este.

Específicamente, se muestra que  $\frac{1}{r^2} \neq 0 \forall r$ , siendo  $r$  el radio de la esfera. Se puede observar aquí, que cuando  $r \rightarrow \infty$ , la curvatura gaussiana de la esfera  $K = \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$ , es decir, se asemeja a la curvatura del plano, por lo que las confecciones de mapas para zonas bastante extensas pueden realizarse adoptando este modelo, mientras que para regiones reducidas o específicas es necesario considerar al elipsoide de revolución como superficie de referencia terrestre.

En relación a nuestro segundo objetivo, se presentan los conceptos propios de la teoría de las deformaciones de las proyecciones cartográficas. Se desarrolla y se ejemplifica la manera de determinar la Elipse Indicatriz de Tissot, a fin de medir las deformaciones en cada punto o región del mapa. Se muestran ejemplos de proyecciones acimutales y cilíndricas. También se estudia la manera en que se deforman meridianos y paralelos, y en función de estas cualidades, se muestran los usos que se les da a cada una de ellas.

Estos mismos conceptos pueden trabajarse en otros modelos (como en el caso del elipsoide de revolución) teniendo en cuenta las exigencias necesarias para las mediciones realizadas en esta nueva superficie de referencia.

## Bibliografía

Bugayevskiy, L. & Snyder, J. (1995). Map Projection: A reference manual. London: Taylor and Francis.

Do Carmo, M. (1976). Differential Geomtery of Curves and Surfaces. New Jersey: Prentice-Hall.

- Hernández Cifre, M. & González, J. (2010). Un curso de Geometría Diferencial. Madrid: CSIC.
- Ibañez Torres, R. (2011). El Sueño del Mapa Perfecto. Cartografía y Matemáticas. España: RBA Coleccionables.
- Lipschutz, M. (1971). Geometría Diferencial. México: McGraw-Hill.
- López D. (1997). Geodesia y Cartografía Matemática. España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Mailing, D. (1992). Coordinate Systems and Map Projections. Wales: Pergamon Press.
- Miretti R., Cerati E. & Coronel L. (2012). Cartografía Matemática. Santa Fé: Universidad Nacional del Litoral.
- Oprea, J. (2007). Differential Geometry and its Applications. USA: The Mathematical Association of America.
- Pearson, F. (1990). Map projections: Theory and Applications. Londres: CRC Press.
- Struik, D. (1961). Geometría Diferencial Clásica. Madrid: Aguilar.