
**Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La
Universidad Nacional de La Matanza**

Comunicación Científica

1. **Título de la Ponencia:** Comparaciones entre los modelos clásicos y estocásticos para estimar volatilidad.
2. **Nombre de la Jornada, Seminario, Congreso u otro tipo de evento científico:** XLVIII Coloquio Argentino de Estadística
3. **Lugar y fecha de realización:** A realizarse en San Miguel de Tucumán, provincia de Tucumán, Argentina, 16 al 18 de Octubre de 2019.
4. **Nombre y apellido del expositor:** María de las Mercedes Abril
5. **Domicilio particular y/o laboral:** Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán. Av. Independencia 1900
6. **Teléfono particular, laboral y/o celular:** (0381)4364093. Interno 7611
7. **Dirección de correo electrónico particular y/o comercial del expositor:** mabrilblanco@hotmail.com mabril@face.unt.edu.ar
8. **Nombre de la Institución que aceptó el trabajo:** Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán.
9. **Link de acceso directo al evento y/o institución responsable de la publicación:** <https://face.unt.edu.ar/web/coloquiosae2019/>
10. **Resumen:** Una característica importante de muchas series de tiempo económicas es que ellas no son en general serialmente correlacionadas, pero sí dependientes. De este modo modelos lineales como aquellos pertenecientes a la familia de los modelos ARMA pueden no ser apropiados para describirlas. Existe una variedad muy grande de modelos no lineales en la literatura, útiles para el análisis de series de tiempo económicas, pero nos concentraremos en los conocidos como modelos de tipo ARCH o GARCH. Una manera más moderna para tratar este tipo de series, y otras con similares características, es por medio del enfoque de espacio de estado. La facilidad de interpretación de estos modelos hacen de ellos el vehículo natural para el tratamiento de los

datos derivados de la actividad económica. Enfocaremos nuestro estudio en comparar y destacar las similitudes y diferencias de estos enfoques. Presentaremos también ejemplos prácticos acerca de las propuestas expuestas y estableceremos puntos de partida para futuros trabajos.

11. Palabras clave: Heterocedasticidad, Volatilidad, Series de tiempo, Espacio de estado, Modelos GARCH, Volatilidad estocástica

12. Desarrollo de la ponencia:

1. La volatilidad

La misma se define como la varianza de una variable aleatoria, condicional a toda la información pasada.

Sea y_t la serie bajo estudio cuya dimensión es $p = 1$. Definimos

$$\mu_t^* = E(y_t | Y_{t-1}) = E_{t-1}(y_t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h_t &= \text{var}(y_t | Y_{t-1}) = E\{(y_t - \mu_t^*)^2 | Y_{t-1}\} \\ &= E_{t-1}(y_t - \mu_t^*)^2 = \text{var}_{t-1}(y_t) = \sigma_t^2, \end{aligned} \quad (2)$$

como la media y la varianza condicionales de y_t dada la información hasta el instante $t - 1$ contenida en Y_{t-1} .

Un modelo usual para tomar en cuenta la volatilidad es de la forma

$$y_t = \mu_t^* + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad (3)$$

donde $E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$, $\text{var}_{t-1}(\varepsilon_t) = 1$ y típicamente los ε_t son independientes e idénticamente distribuidos (iid) con distribución F . Dependiendo de la definición de h_t se llegará a un modelo ARCH, GARCH y otras variantes similares.

2. Modelos ARCH

Un modelo $ARCH(m)$ puede ser expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid } D(0,1), \\ h_t &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i y_{t-i}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $D(\cdot)$ es una función de densidad de probabilidad con media cero y varianza unitaria $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m - 1$ y $\alpha_m > 0$.

La estimación en los modelos ARCH es realizada a través del método de cuasi máxima verosimilitud, de modo que es necesario realizar un supuesto adicional acerca de la distribución del proceso de innovación ε_t . De manera intuitiva podemos decir que suponemos que tenemos el modelo correcto y que conocemos la distribución del proceso de error; seleccionamos un conjunto de valores para los parámetros desconocidos que maximizan esa distribución. Estos estimadores reciben el nombre de estimadores de máxima verosimilitud y tienen la propiedad general de ser consistentes y eficientes.

Weiss (1986) y Bollerslev y Woolridge (1992) mostraron que bajo el supuesto de normalidad, el estimador por cuasi máxima verosimilitud es consistente si la media condicional y la varianza condicional se encuentran correctamente especificadas. Este estimador es sin embargo ineficiente con un grado creciente de ineficiencia a medida que se aparta de esa normalidad (Engle y González-Rivera, 1991).

3. Modelos GARCH

Bollerslev (1986, 1987 y 1988) extendió el trabajo original de Engle desarrollando una técnica que permite que la varianza condicional sea un proceso ARMA en sí mismo. Esa extensión dio como resultado lo que se denomina modelo autorregresivo generalizado con heterocedasticidad condicional o modelo GARCH. La idea se basa en el hecho que un modelo ARMA puede ser más parsimonioso, en el sentido de tener menos parámetros, que un modelo AR o un MA puro. Del mismo modo un modelo GARCH puede ser usado para describir la volatilidad con menos parámetros que un modelo ARCH.

Un modelo $GARCH(m, s)$ se define como

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad (5)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j h_{t-j} \quad (6)$$

donde ε_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza uno, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m-1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, s-1$, además, $\alpha_m > 0, \beta_s > 0, \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$, con $q = \max(m, s)$.

Los beneficios de utilizar un modelo GARCH resultan evidentes; un modelo ARCH de orden superior puede tener una representación GARCH más parsimoniosa que resulta más fácil de identificar y estimar. Esto es particularmente cierto ya que todos los coeficientes en la expresión (6) deben ser no negativos. Claramente podemos observar que cuanto más parsimonioso sea el modelo, menores serán las restricciones que tengamos que imponer a los coeficientes y más sencillo será el correspondiente proceso de estimación.

Los estimadores del modelo definido en las ecuaciones (5) y (6) son obtenidos por medio del método de máxima verosimilitud condicional. Suponiendo que existe normalidad para los ε_t , tenemos que el logaritmo de la verosimilitud condicional a las primeras m observaciones está dado por

$$l(y_{m+1}, \dots, y_n | \alpha, \beta, y_1, \dots, y_m) \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^n \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^n \frac{y_t^2}{h_t}. \quad (7)$$

Las estimaciones de los parámetros son obtenidas por medio de métodos numéricos de maximización. Otras funciones de verosimilitud son usadas para el proceso de estimación de estos modelos.

4. Un ejemplo práctico. El uso de los modelos GARCH para el estudio de la inflación en la Argentina

Nos referiremos a un ejemplo tratado con sumo detalle en J. Abril y M. Abril (2017). Dicho caso únicamente sirve como una manera de exponer como se utiliza el modelado de la familia GARCH para el estudio de una situación práctica como ser el análisis de la inflación en la Argentina para el período comprendido entre 1943 y 2013. Analizaremos esta serie usando el paquete Estimating and Forecasting ARCH Models Using G@RCH 7 desarrollado por Laurent (2013).

En el apartado (a) de la **Figura 1** se muestran los niveles mensuales del Índice de Precios al Consumidor (o IPC), a su vez, en el apartado (b) de la misma figura podemos ver las primeras diferencias del logaritmo del nivel mensual del IPC. Esto es lo que popularmente se conoce con el nombre de inflación y será la serie con la cual trabajamos

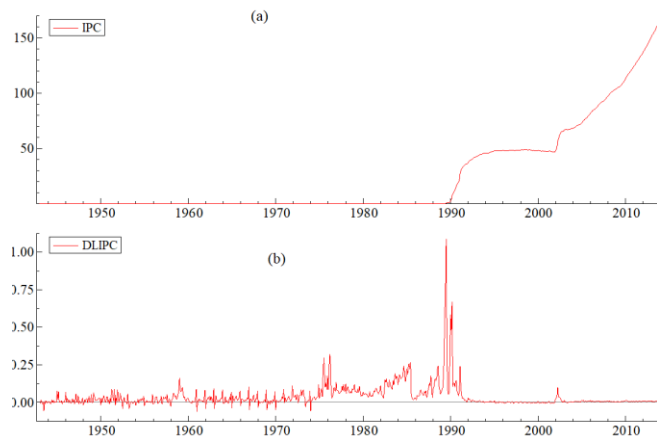


Figura 1: (a) Niveles mensuales del Índice de Precios al Consumidor desde Enero de 1943 hasta Diciembre de 2013. (b) Primeras diferencias del logaritmo del nivel del Índice de Precios al Consumidor desde Enero de 1943 hasta Diciembre de 2013.

En la **Figura 2** se muestra en el apartado (a) la autocorrelación estimada para la serie de inflación bajo estudio, además en el apartado (b) podemos ver la función de autocorrelación parcial estimada. Por último, en el apartado (c), tenemos la función de densidad estimada con una línea de color rojo, comparada con la función de densidad normal con una línea verde.

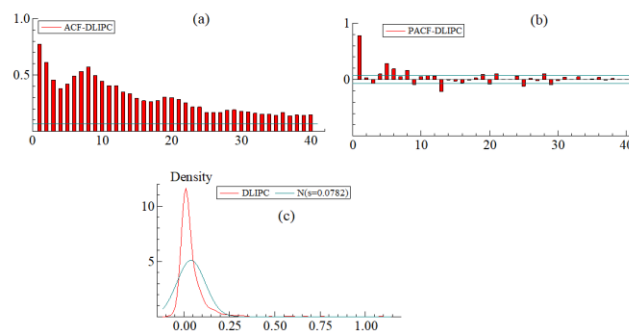


Figura 2: (a) Función de autocorrelación de la serie de inflación para el período comprendido entre Enero de 1943 hasta Diciembre de 2013. (b) Función de autocorrelación parcial de la misma serie bajo estudio. (c) Función de densidad estimada comparada con la densidad normal (línea verde).

Del estudio de esta figura vemos que la serie no es estacionaria, aunque tiene algunos componentes estacionales y su distribución es diferente a la de una variable normal, por lo que es posible que debamos realizar sus correspondientes estimaciones haciendo uso de una distribución t de Student.

Nos quedamos con un modelo donde y_t es la serie bajo estudio y su especificación se encuentra dada por

$$y_t = \mu_t^* + \varepsilon_t \sqrt{h_t},$$

con ε_t independiente con distribución t de Student cuyos grados de libertad son 2,21167. La media condicional μ_t^* es igual a una media general dada por μ un componente estacional y un proceso $ARMA(1,1)$, lo cual explícitamente es

$$\mu_t^* = \mu + \gamma_t + \varphi y_{t-1} + \nu_t + \theta \nu_{t-1},$$

con $\nu_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$ y γ_t es un componente estacional que satisface la siguiente condición

$$\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \dots - \gamma_{t-11},$$

o sea que suma cero sobre el año anterior. Además, la varianza condicional se encuentra dada por

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha \nu_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},$$

o sea que es un modelo $GARCH(1,1)$ con una constante dada por α_0 . Como resultado del proceso de estimación que surge del modelo de volatilidad, se obtienen los gráficos representados en la **Figura 3**.

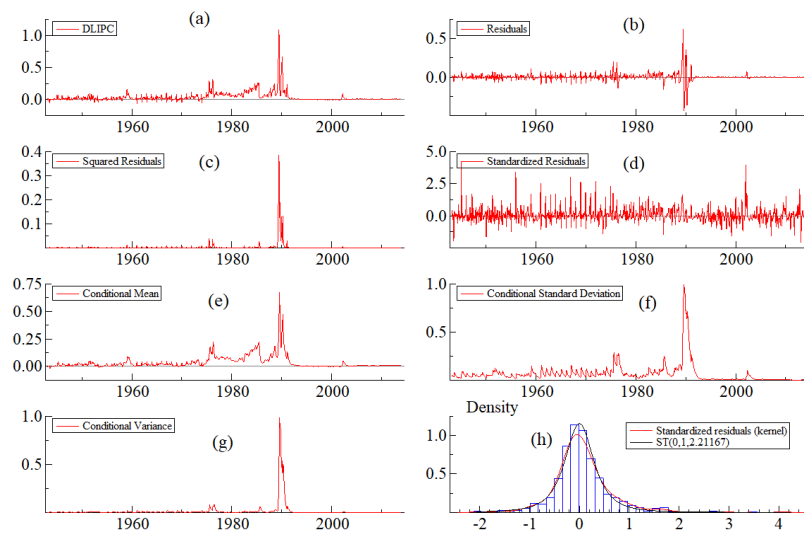


Figura 3: Características de la serie de inflación para el período comprendido entre 1943 y 2013. (a) Serie de inflación. (b) Residuos de la serie de inflación. (c) Residuos cuadráticos. (d) Residuos estandarizados. (e) Media condicional que surge de la aplicación del modelo de volatilidad a la serie bajo estudio. (f) Desvío estándar condicional. (g) Varianza condicional. (h) Residuos estandarizados comparados con una distribución t con 0, 1 y 2,21167 grados de libertad.

Estudiando detenidamente los apartados (a), (e), (f) y (g) de la **Figura 3** podemos decir que el modelo explica adecuadamente la serie de inflación de nuestro país para el período entre 1943 y 2013. Esta misma característica se vuelve a observar en el apartado (h) cuando comparamos la distribución de los residuos estandarizados con una distribución t de Student con 2,21167 grados de libertad. A la hora de realizar el proceso de predicción, en la parte superior de la **Figura 4** se puede ver las últimas diez observaciones de la serie bajo estudio, resaltadas en color azul, y las correspondientes predicciones de la media condicional. Al comparar el valor predicho con aquel efectivamente observado se acepta la hipótesis que no difieren significativamente entre sí al 95%. En la gráfica inferior se trató de predecir la varianza condicional correspondiente a las últimas diez observaciones de nuestra serie bajo estudio, sin embargo, esto no fue posible. La varianza condicional, o volatilidad, a partir de Octubre de 2004 es igual a cero. Esta situación viene a corroborar el hecho de que a partir de esa fecha no se puedan tener predicciones de la volatilidad para esta serie, lo cual está en consonancia con el inicio de un período de falta de confianza en las estadísticas oficiales.

Estadísticamente, esto implicó la estimación de valores diferentes a los que posiblemente hayan sido en la realidad, lo cual dio lugar a una serie extremadamente suave que no coincide con el resto de la misma ni con la realidad vivida.

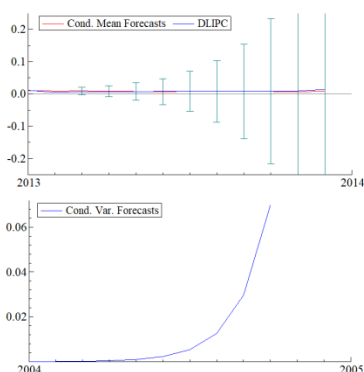


Figura 4: Predicción de la media condicional versus la serie de inflación para el período comprendido entre 1943 y 2013 (parte superior). Predicción de la varianza condicional para el modelo que ajusta la serie de inflación entre 1943 y 2013 (parte inferior).

5. El enfoque de espacio de estado

Un modelo estructural pretende describir una o más series de tiempo de interés a través del reconocimiento de que determinados componentes no observables pero interpretables y estimables se encuentran presentes en la serie. A partir de la adopción de un modelo estructural correctamente especificado es posible, no solo hacer previsiones de valores futuros de la serie de interés, sino también hacer interpretaciones consistentes con su evolución histórica. La ventaja es que tales componentes no observables, los que en general son entendidos como tendencia, estacionalidad o movimientos cíclicos, pueden ser estudiados de forma separada, estrategia que permite un mejor entendimiento de las características específicas del problema práctico considerado.

La representación de espacio de estado involucra solamente dependencia de un paso, lo cual conduce a un algoritmo simple para calcular las predicciones de valores futuros de la serie conocido como el algoritmo del filtro y suavizador de Kalman. El objetivo del filtro de Kalman es actualizar nuestro conocimiento del sistema de ecuaciones que hacen a nuestro modelo cada vez que una nueva

observación es obtenida. Por otra parte, el suavizador es usado para estimar los componentes de la serie y para calcular estadísticos de diagnóstico que sirven para detectar observaciones atípicas y cambios estructurales y está basado en toda la muestra. El suavizado, por su parte, toma la forma de una recursión hacia atrás.

La representación de espacio de estado relaciona el vector de errores o disturbios $\{\varepsilon_t\}$ con el vector de observaciones $\{y_t\}$ vía $\{\alpha_t\}$ está dada por

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \\ \alpha_t &= T_t \alpha_{t-1} + R_t \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q_t), \quad t = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

donde y_t es un vector de orden $p \times 1$ de observaciones y α_t es un vector de orden $m \times 1$ inobservable, llamado vector de estado.

La idea subyacente en el modelo es que el desarrollo del sistema en el tiempo está determinado por α_t de acuerdo con la segunda ecuación de (8); pero debido a que α_t no puede ser observado directamente, debemos basar nuestro análisis en las observaciones, o sea y_t . Las matrices, Z_t, T_t, R_t, H_t y Q_t se suponen que son inicialmente conocidas y los términos de error ε_t y η_t se suponen que son serialmente independientes e independientes entre sí en todo momento de tiempo. Las matrices Z_t y T_t pueden depender de y_1, \dots, y_{t-1} . El estado inicial α_0 se supone que es $N(a_0, P_0)$ e independiente de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ y de η_1, \dots, η_n donde en un principio se supone que a_0 y P_0 son conocidos.

Los parámetros en los modelos de espacio de estado que reciben el nombre de hiperparámetros. Son estimados utilizando el método de máxima verosimilitud.

Por último, las predicciones y sus matrices de varianzas de los errores asociadas pueden obtenerse mediante la continuación del filtrado y suavizado de Kalman más allá de $t = n$.

6. Modelos de volatilidad estocástica

El modelo de volatilidad estocástica o modelo MVE (o SV en inglés), tiene como premisa el hecho de que la volatilidad depende de sus valores pasados pero es independiente de los retornos (la serie bajo estudio) pasados del activo bajo análisis. Denotemos a la varianza condicional como $\sigma_t^2 = E(y_t^2 | Y_{t-1})$ donde Y_{t-1} es toda la información del proceso hasta el instante $t - 1$. Diremos que una serie sigue un modelo SV si cumple con las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t &= e^{h_t/2} \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t,\end{aligned}\tag{9}$$

donde ε_t es una serie estacionaria con media igual a cero y varianza uno, y h_t es otra serie estacionaria con densidad de probabilidad dada por una función $f(h)$.

Los MVE son difíciles de estimar. Podemos utilizar el enfoque propuesto por Durbin y Koopman (1997a, 1997b, 2000) que consiste en utilizar un procedimiento de cuasi máxima verosimilitud por medio del filtro de Kalman. En este caso, el modelo puede ser reexpresado de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\log(y_t^2) &= \kappa + h_t + u_t \\ h_t &= \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t,\end{aligned}\tag{10}$$

donde $u_t = \log(\varepsilon_t^2) - E[\log(\varepsilon_t^2)]$ y $\kappa = \log(\sigma^2) + E[\log(\varepsilon_t^2)]$. La estimación de sus componentes se realiza por cuasi máxima verosimilitud usando el filtro y suavizador de Kalman que ya fueron presentados con anterioridad.

7. Un ejemplo práctico. Los MVE para el estudio de la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano

La serie de tiempo de la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano desde el 1 de Octubre de 1981 hasta el 28 de Junio de 1985 (946 observaciones) será usada como una ilustración empírica del MVE. Las estimaciones las haremos usando el paquete STAMP de Koopman, Harvey, Doornik, y Shephard (2010). Denotamos como x_t a la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano, entonces los retornos diarios son iguales a $y_t^* = \log(x_t) - \log(x_{t-1})$ para todo el período analizado. Para evitar tomar posteriormente logaritmos de valores iguales a cero, tomamos como nuestra serie de trabajo a los desvíos con respecto a su media de los retornos diarios, o sea que nuestra serie de trabajo es $y_t = y_t^* - \bar{y}^*$, donde \bar{y}^* es la media aritmética de y_t^* .

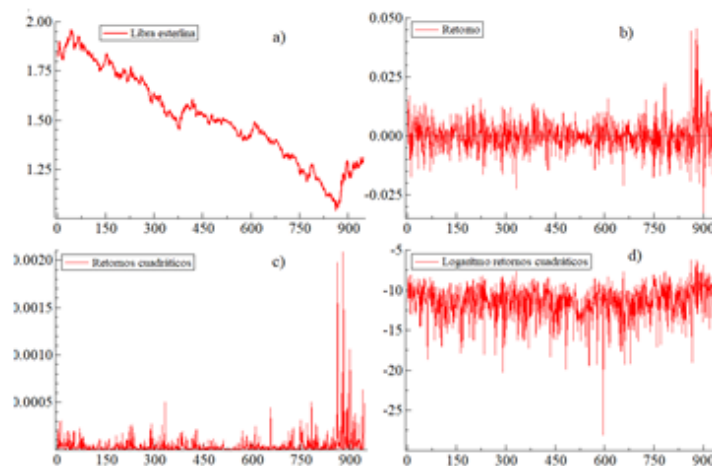


Figura 5: En el panel a) se muestra la serie de la tasa de cambio diaria de la libra esterlina con respecto al dólar, en el panel b) los desvíos con respecto a su media de los retornos diarios y_t , en el panel c) los cuadrados de la serie del panel b), y en el panel d) el logaritmo de la serie del panel c)

El modelo usado para la serie $\log(y_t^2)$ está dado por un nivel fijo, más irregulares y más un AR(1). Además, el estadístico de normalidad es alto, lo cual es

inevitable debido a que el modelo transformado no es Gaussiano y la estimación de α_1 en (10) es aproximadamente $\alpha_1 = 0,996$.

La **Figura 6** muestra la estimación de e^{h_t} para la serie y_t de retornos (corregidos por media) de la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano.

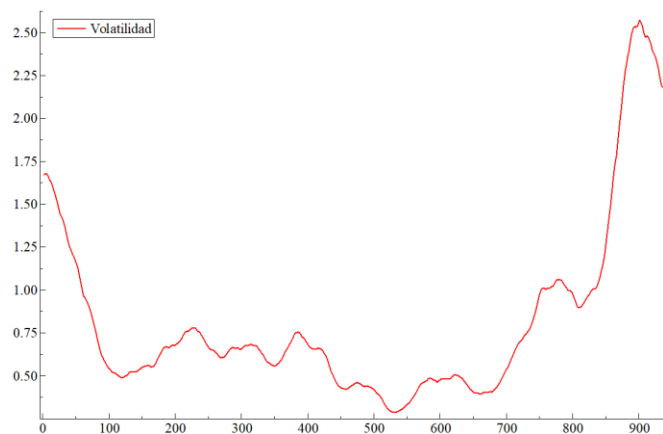


Figura 6: Estimación de e^{h_t} para la serie y_t de retornos de la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano.

Para estimar σ^2 se computa la serie corregida por heterocedasticidad condicional de la siguiente forma

$$\tilde{y}_t = y_t e^{\frac{\tilde{h}_t}{2}}, \quad (11)$$

donde

$$\tilde{h}_t = \tilde{\alpha}_1 \tilde{h}_{t-1} \quad (12)$$

y luego se calcula la varianza estimada $\tilde{\sigma}_t^2$ de la serie \tilde{y}_t definida en (11), la cual es

$\tilde{\sigma}_t^2 = 0,0000557972$. El gráfico de $\tilde{\sigma} \exp(h_t/2)$ junto con y_t de la **Figura 7** muestra

como los desvíos estándares condicionales cambian con las observaciones. Puede valer la pena centrarse en un período más corto para tener una mejor percepción de estos cambios.

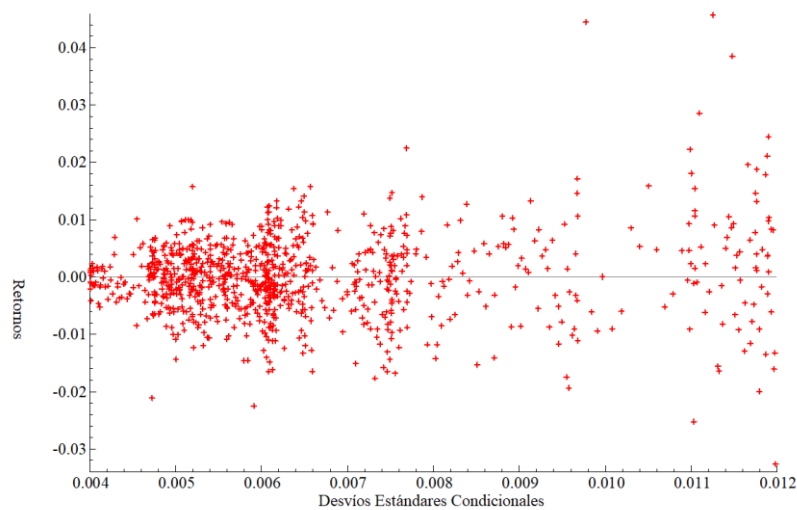


Figura 7: Gráfico de los desvíos estándares condicionales junto con la serie de retornos de la tasa de cambio diaria entre la libra esterlina y el dólar norteamericano

8. Comparaciones y similitudes entre los modelos de la familia GARCH y los de volatilidad estocástica

- a) En relación a su construcción:** Los modelos de la familia GARCH asumen la volatilidad como observable dentro de la variable bajo estudio y tienen una única fuente aleatoria para recoger efectos sobre la media y la volatilidad. Por otra parte, los modelos SV consideran a la volatilidad como una variable no observable y separan en dos fuentes aleatorias los efectos sobre la media y la volatilidad respectivamente.
- b) En relación a los hechos estilizados:** Los modelos GARCH y SV poseen ciertas características como ser que la varianza condicional cambia en el tiempo o que las distribuciones marginales en ambos casos son simétricas. Además, sirven para poner en términos de un modelo los efectos de la agrupación de la volatilidad y algunas extensiones, como ser los efectos del apalancamiento y la persistencia de la volatilidad a lo largo del tiempo.
- c) En relación a los modelos de volatilidad continuos aplicados en la valoración de activos financieros:** Algunos modelos como ser los modelos SV con retardos pueden ser vistos como discretizaciones "exáctas" de un

amplio grupo de modelos de volatilidad estocástica continuos. Por otra parte, los modelos de la familia GARCH pueden ser tomados como filtros para extraer el proceso de varianza condicional en tiempo continuo a partir de datos financieros discretos.

- d) En relación a los parámetros:** La mayor parte de los modelos de la familia GARCH necesitan de restricciones iniciales sobre los parámetros para poder asegurar que la varianza condicional sea positiva. Este tipo de restricción no es necesaria con los modelos SV.
- e) En relación a los momentos:** Para los modelos GARCH(1,1) y los modelos SV(1) tenemos que la distribución marginal tiene colas más pesadas que la distribución normal.
- f) En relación a la propiedad de agregación temporal:** Los modelos SV con retardo constituyen una clase cerrada en relación a la propiedad de agregación natural. Los modelos de la familia GARCH no constituyen una clase cerrada respecto a la propiedad de agregación temporal.
- g) En relación a la estimación:** Los modelos SV son más difíciles de estimar, desde el punto de vista clásico, que los modelos de la familia GARCH ya que la función de verosimilitud se encuentra expresada de forma implícita en los primeros mientras que es explícita en los segundos. Por otra parte, la estimación por cuasi máxima verosimilitud que está basada en el filtro de Kalman que implica la utilización de técnicas de simulación aplicadas a los modelos SV permite obtener estimaciones de la volatilidad dada la información disponible hasta el período anterior y también estimaciones suavizadas dada toda la información de la muestra. Estas estimaciones suavizadas no son posibles de obtener, sin tener que realizar necesariamente aproximaciones para los modelos de la familia GARCH.
- h) En relación a evidencias empíricas:** Se tienen evidencias a nivel empírico a favor de los modelos SV frente a los modelos de la familia GARCH. Pero también tenemos evidencias a favor de los modelos ARCH frente a un modelo SV(1), es decir un modelo de volatilidad estocástica de primer orden. En

términos generales ambos modelos dan lugar a buenos ajustes en situaciones prácticas.

9. Consideraciones finales

Numerosas series de tiempo económicas no tienen una media constante y en situaciones prácticas, podemos ver que la varianza del error observacional está sujeta a una sustancial variabilidad condicional a través del tiempo. Ese fenómeno es conocido como volatilidad.

Entre los modelos que hemos analizado encontramos a los modelos ARCH y los modelos GARCH siendo estos últimos un caso particular de los primeros. Fue Engle en el año 1982 el que inicialmente presentó a los modelos ARCH y posteriormente Bollerslev en 1986 presentó la forma general de los modelos GARCH. Los modelos de la familia GARCH pueden llegar a presentar una serie de problemas ya que se necesita un gran número de datos para obtener una estimación robusta y no están diseñados para generar predicciones de la varianza varios pasos hacia adelante.

Una posible solución a los conflictos suscitados en los modelos anteriores se plantea a través de los modelos de volatilidad estocástica en donde se supone que la serie bajo estudio depende de una variable no observable (o variable latente), que sigue un proceso estocástico ARMA y de una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida.

Los modelos ARCH y los modelos SV difieren en la definición de la ecuación que modela la volatilidad. En los primeros, a la volatilidad se la considera como una función no estocástica no lineal del comportamiento pasado de la serie, mientras que en los modelos SV a la volatilidad se la considera como un componente no observable de la serie modelada a través de un proceso lineal autorregresivo.

Los modelos SV aunque han tenido un desarrollo teórico menor y presentan una estimación más compleja constituyen una alternativa válida, interesante y mucho más flexible que los modelos de la familia ARCH y GARCH.

10. Referencias bibliográficas resumidas

- Abril, Juan Carlos (2004). Modelos para el Análisis de las Series de Tiempo. Ediciones Cooperativas: Buenos Aires.
- Abril, María de las Mercedes (2017). El Enfoque de Espacio de Estado para el Estudio de la Volatilidad. Editorial Académica Española: Saarbrücken (Alemania).
- Abril, J. C. y Abril, M. de las M. (2018). Métodos Modernos de Series de Tiempo y sus Aplicaciones. Editorial Académica Española: Saarbrücken (Alemania).
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-27.
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*. Wiley. New York.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987 -1007.
- Engle, R. F., Hendry, D. F., Trumble, D. (1985). Small sample properties of ARCH estimators and tests. *Canadian Journal of Economics*, 18, 66-93.
- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Harvey, A. C., Ruiz, E. y Shephard, N. (1994). Multivariate stochastic variance models. *Rev. Econom. Stud.*, 61, 247-64.
- Kim, S. y Shephard, N. (1994). Stochastic volatility: optimal likelihood inference and comparison with ARCH model. Discussion paper. Nuffield College. Oxford.